

V-8 柱の配置が平行4辺形の頂点となる無梁板の応力解析

金沢大学工学部 正員 小野一良

著者は前回の講演会において無梁板が各柱から等しい大きさのモーメントを受ける場合について無梁板に生ずる曲げモーメントを楕円函数を用いて計算する方法を説明したが、今回は無梁板が一樣な分布荷重を受ける場合に板内に生ずる曲げモーメントを計算した。この問題は古くから多くの人によつて取扱われて来たが、柱の太さを考慮に入れた場合には解式が複雑となるが、または収斂の悪い又重級数を取扱う欠点があつた。しかし楕円函数を用いることによつて解式は簡単になり、さらに柱より受ける反力の分布型式を自由に選ぶことができ、かつ柱の配置が平行4辺形の頂点にある場合にも拡張することができる。前報告にも述べたごとく計算の便宜上

$$M_1 = -\frac{D}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_2 = -\frac{D}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_3 = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1)$$

とおけば平板に生ずる曲げモーメントは次式によつてあらわすことができる。

$$M_x = (1+\nu)M_1 + (1-\nu)M_2, \quad M_y = (1+\nu)M_1 - (1-\nu)M_2, \quad M_{xy} = (1-\nu)M_3 \quad (2)$$

いま無限に広い平板上の原点を中心とした半径 ρ なる円内に大きさ P なる垂直荷重が作用したとき平板に生ずるたわみおよび曲げモーメントは次式によつて与えられる。

$$\rho \geq \rho \quad \text{において} \quad w = \frac{P}{8\pi D} \left\{ (\rho^2 + d^2) \log \frac{\rho}{d} + C + d^2 \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho \geq \rho \quad \text{において} \quad M_1 &= -\frac{P}{4\pi} \left(1 + \log \frac{\rho}{d} \right), \\ M_2 &= -\frac{P}{8\pi} \left(1 - \frac{d^2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta, \quad M_3 = -\frac{P}{8\pi} \left(1 - \frac{d^2}{\rho^2} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに C および d は積分常数であり、 d は半径 ρ なる円内における荷重 P の分布様式によつて決まる常数である。ただし P の分布は ρ のみの函数とする。

次に x 軸に対し角 δ をなす方向を軸とするモーメント T が原点に作用するとき平板に生ずるたわみおよび曲げモーメントは次式によつて与えられる。

$$\text{図-1} \quad w = -\frac{T}{8\pi D} \rho \left(1 + 2 \log \frac{\rho}{d} \right) \sin(\theta - \delta) \quad (5)$$

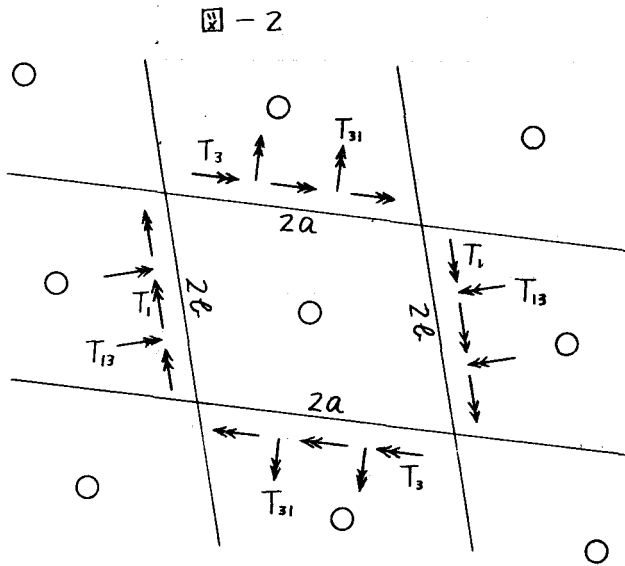
$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{T}{4\pi} \frac{\sin(\theta - \delta)}{\rho}, \quad M_2 = -\frac{T}{4\pi} \frac{\cos(\theta - \delta) \sin 2\theta}{\rho}, \\ M_3 &= \frac{T}{4\pi} \frac{\cos(\theta - \delta) \cos 2\theta}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(3) および (5) 式によれば $\rho \rightarrow \infty$ となるとき $w \rightarrow \infty$ となるので $\rho \rightarrow \infty$ のとき $w \rightarrow 0$ とする境界条件を満足させることはできない。しかし平板上に数箇の荷重またはモーメントが作用するときその作用点ならびに荷重の大きさの間にある関係が成立

すれば $\ell \rightarrow \infty$ において $W \rightarrow 0$ とすることができる。このときには当然平板に生ずる曲げモーメントも $\ell \rightarrow \infty$ において 0 となる。この平板に多数の荷重またはモーメントが作用する場合にはこれを上記の性質を持つ荷重の組み合わせに分解し、各の組み合わせについて平板のたわみまたは曲げモーメントを計算して後にこれを集計すればよい。無限に広い無梁板において各柱から受ける反力の大きさが分つていればこの反力を外力と考えることによつて上記の方法を適用することができる。

ここに無限に広い無梁板が一様な分布荷重 p を受けている場合について上記の方法を適用する。無梁板の柱の配置が平行四辺形の頂点に当る位置にあるとなし、これらの柱の中間を通る2群の直線で平板上に多数の平行四辺形を画く。これらの直線の交角を φ とし、各の平行四辺形の相隣れる両辺の長さを $2a$ および $2b$ とする。各の平行四辺形について考えればこの中に作用する分布荷重 p と平行四辺形の中心にある柱より受ける反力 P とが作用し、これらの力は平衡を保つ。

$$P = 4abp \sin \varphi \quad (7)$$



しかしこれだけでは無限の遠方における平板のたわみを 0 とすることはできない。このためには平行四辺形の周辺をなす線上に単位長さ当り次のモーメントを追加して考える必要がある。

ここに

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{pa^2}{6} \sin^2 \varphi - \frac{p}{4} d \Delta^2, \\ T_{13} &= \frac{pa^2}{6} \sin \varphi \cos \varphi, \\ T_3 &= \frac{pb^2}{6} \sin^2 \varphi - \frac{p}{4} d \Delta^2, \\ T_{31} &= \frac{pb^2}{6} \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \right\} (8)$$

T_1, T_{13}, T_3, T_{31} の正の方向を図-2に示す。

ここに $z = x + iy$ とおけば無梁板上のすべての点の位置は複素数 z によつてあらわすことができる。また図-2に示す平行四辺形の相隣れる両辺の方向および大きさも複素数 $2w_1$ および $2w_3$ であらわす。ただし

$$0 \leq \arg w_1 < \arg w_3 < \pi, \quad |w_1| = a, \quad |w_3| = b \quad (9)$$

このときはすべての柱の位置を次式によつてあらわすことができる。ここに m, n は 0 または正負の任意の整数とする。

$$\Omega_{m,n} = 2mw_1 + 2nw_3 \quad (10)$$

番号 m, n の柱から受ける反力 P によつて Z の位置に生ずる曲げモーメント M_1 は (4) 式により

$$M_1 = \frac{P}{4\pi} \mathcal{R} \left(1 + \log \frac{Z - \Omega_{m,n}}{l} \right) \quad (11)$$

この柱を中心とする平行4辺形内の分布荷重 P によつて Z の位置に生ずる曲げモーメント M_1 は (4) 式をこの面内で積分することによつて得られ、その結果は

$$M_1 = \frac{P}{4\pi} \mathcal{R} \left\{ \begin{aligned} & \phi_1(Z - \Omega_{m,n} + w_1 + w_3) - \phi_1(Z - \Omega_{m,n} - w_1 + w_3) \\ & + \phi_1(Z - \Omega_{m,n} - w_1 - w_3) - \phi_1(Z - \Omega_{m,n} + w_1 - w_3) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここに

$$\phi_1(Z) = \frac{Z^2}{8w_1w_3} \left(\frac{1}{Z} - \log \frac{Z}{l} \right) + \frac{1}{2} \mu i \xi_3^2 \frac{w_3}{w_1} \quad (13)$$

ただし

$$\arg w_3 - \pi < \mathcal{J} \left(\log \frac{Z}{l} \right) \leq \arg w_3 + \pi \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \arg w_3 - \pi < \arg Z \leq \arg w_1 + \pi \text{ のとき } \mu = 0, \\ \arg w_1 + \pi < \arg Z \leq \arg w_3 + \pi \text{ のとき } \mu = 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

また ξ_1, ξ_3 は実数にして次式によつて求められる値とする。

$$Z = 2\xi_1 w_1 + 2\xi_3 w_3 \quad (16)$$

平行4辺形の周辺に作用するモーメントによつて Z の位置に生ずる曲げモーメントは (6) 式の \mathcal{T} に (8) 式を代入し、これを周辺に沿うて積分することによつて求められ、その結果は

$$M_1 = \frac{P}{4\pi} \mathcal{R} \left\{ \begin{aligned} & \psi_1(Z - \Omega_{m,n} + w_1 + w_3) - \psi_1(Z - \Omega_{m,n} - w_1 + w_3) \\ & + \psi_1(Z - \Omega_{m,n} - w_1 - w_3) - \psi_1(Z - \Omega_{m,n} + w_1 - w_3) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ここに

$$\psi_1(Z) = \frac{1}{24} \left(\frac{w_1}{w_3} + \frac{w_3}{w_1} \right) \log \frac{Z}{l} - \mu \left(\frac{i w_3}{24 w_1} + \frac{\alpha k}{4\pi} \right) \quad (18)$$

$$k = \frac{\pi \Delta^2}{4ab \sin \varphi} \quad (19)$$

ただし μ は (15) 式によつて与えられた値とする。これら3箇の M_1 を合計し、さらにすべての m, n について合計した結果次式が得られる。

$$M_1 = \frac{P}{4\pi} \mathcal{R} \left\{ \log \mathcal{R}(\nu | \tau) - \frac{1}{3} \log \frac{\mathcal{R}'(0 | \tau)}{2\pi} + \pi i \xi_3^2 \tau - \frac{\alpha}{2} k \right\} \quad (20)$$

$$\text{ただし } \nu = \frac{Z}{2w_1}, \quad \tau = \frac{w_3}{w_1} \quad (21)$$

$$|Z - \Omega_{m,n}| \geq \Delta \quad (22)$$

上式を計算し易い形に書き変えれば

$$M_1 = \frac{P}{4\pi} \Re \left\{ \pi i \tau \left(\frac{1}{6} + \xi_3^2 \right) + \log(2 \sin \pi \nu) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(2n\pi \nu) \left\{ \coth(-n\pi i \tau) - 1 \right\} - \frac{\lambda}{2} k \right\} \quad (23)$$

同様にして $-M_2$ および M_3 はそれぞれ次式の実数部および虚数部より求められる。

$$\begin{aligned} -M_2 + iM_3 = & \frac{P}{4\pi} \left(\frac{a}{w_1} \right)^2 \mathcal{J}(\tau) \left\{ -\pi \left(\frac{1}{6} + \xi_3^2 \right) + \pi i \xi_3 \cot \pi \nu \right. \\ & \left. + 2\pi i \xi_3 \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n\pi \nu \left\{ \coth(-n\pi i \tau) - 1 \right\} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi \nu}{\sinh^2(-n\pi i \tau)} \right\} \\ & + \lambda k \frac{P}{4\pi} \left(\frac{a}{w_1} \right)^2 \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\pi \mathcal{J}(\tau)}{2 \sin^2 \pi \nu} - 2\pi \mathcal{J}(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} n \cos 2n\pi \nu \left\{ \coth(-n\pi i \tau) - 1 \right\} \right\} \quad (24) \end{aligned}$$

(23) および (24) 式に含まれる無限級数は非常に収斂が速いため容易に正確な値を求めることができる。特に $k=0$, $\arg(w_1)=0$, $\arg(w_3)=\pi/2$ となる場合には Nádai が Fourier 単級数を用いて解いた結果を \mathcal{R} 函数に変形している。⁴⁾

参 考 文 献

- 1) 小野一良: 広さ無限の平板ならびに無梁板の解法について, 土木学会才 14 回年次学術講演会講演概要, 才 I 部, 昭和 34 年 6 月
- 2) S. Wainowsky-Krieger: Beitrag zur Theorie der Pilzdecken, Z.A.M.M. Bd. 14 Heft 1, Feb. 1934.
- 3) Lewy: Die Lösung des Pilzdeckenproblems durch Fouriersche Reihen, Der Bauingenieur, 1. Jahrgang Heft 22, Nov. 1920.
- 4) A. Nádai: über die Biegung durchlaufender Platten und der rechteckigen Platte mit freien Rändern, Z.A.M.M. Bd. 2 Heft 1, Feb. 1922.