# V—7　無限な拡がりをもつ厚板に任意荷重が作用するときの純弾性学的解について

信州大学工学部　正会員　谷本勉之助

ここに取扱うのは，図-1のように，$x, y$ 軸の方向に無限な拡がりをもつ厚さ $2c$ の板の片面に，任意の分布荷重 $F(x,y)$ が作用したときの純弾性学的解を与えることである．

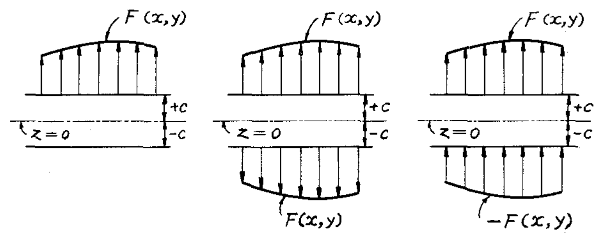


図-1　図-2　図-3

この問題の境界条件を式で書けば

$$
\left.
\begin{aligned}
&(\widehat{zz})_{z=+c}=F(x,y),\\
&(\widehat{zz})_{z=-c}=0,\\
&(\widehat{xz})_{z=\pm c}=0,\\
&(\widehat{yz})_{z=\pm c}=0.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (1)
$$

この問題の解を求めるには，図-2の体系の解と図-3の体系の解とを加えて半分にすればよい．

図-2の体系の境界条件は

$$(\widehat{zz})_{z=+c}=F(x,y), \quad (\widehat{zz})_{z=-c}=F(x,y), \quad (\widehat{xz})_{z=\pm c}=0, \quad (\widehat{yz})_{z=\pm c}=0$$

で，その解は

B. Tanimoto; "Thick Plate Subjected to Three Pairs of External Forces on Bounding Planes," Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, Nagano, 1960

に与えられている．

図-3の体系の境界条件は

$$(\widehat{zz})_{z=+c}=F(x,y), \quad (\widehat{zz})_{z=-c}=-F(x,y), \quad (\widehat{xz})_{z=\pm c}=0, \quad (\widehat{yz})_{z=\pm c}=0$$

で，その解は上の拙文をもとにしてうることができる．

このようにして，図-1の体系の解は次の結果になる：

$$
\begin{aligned}
\widehat{xx}=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty d\beta\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg[&\left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2}+2\nu\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)\left\{\frac{\cosh\gamma z}{(1-\kappa+\kappa')\cosh\gamma c}+\frac{\sinh\gamma z}{(1+\kappa-\kappa')\sinh\gamma c}\right\}+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\left\{\frac{\gamma z\sinh\gamma z-\kappa'\cosh\gamma z}{(1-\kappa+\kappa')\cosh\gamma c}\right.\\
&\left.+\frac{\gamma z\cosh\gamma z-\kappa\sinh\gamma z}{(1+\kappa-\kappa')\sinh\gamma c}\right\}\Bigg]F(\xi,\eta)\cos\alpha(x-\xi)\cos\beta(y-\eta)\,d\xi\,d\eta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{yy}=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty d\beta\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg[&\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2}+2\nu\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)\left\{\frac{\cosh\gamma z}{(1-\kappa+\kappa')\cosh\gamma c}+\frac{\sinh\gamma z}{(1+\kappa-\kappa')\sinh\gamma c}\right\}+\frac{\beta^2}{\gamma^2}\left\{\frac{\gamma z\sinh\gamma z-\kappa'\cosh\gamma z}{(1-\kappa+\kappa')\cosh\gamma c}\right.\\
&\left.+\frac{\gamma z\cosh\gamma z-\kappa\sinh\gamma z}{(1+\kappa-\kappa')\sinh\gamma c}\right\}\Bigg]F(\xi,\eta)\cos\alpha(x-\xi)\cos\beta(y-\eta)\,d\xi\,d\eta,
\end{aligned}
$$

$$\widehat{zz}=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty d\beta\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\Big[\Big\{\frac{(1+\kappa')\cosh\gamma z}{(1-\kappa+\kappa')\cosh\gamma c}+\frac{(1+\kappa)\sinh\gamma z}{(1+\kappa-\kappa')\sinh\gamma c}\Big\}-\gamma z\Big\{\frac{\sinh\gamma z}{(1-\kappa+\kappa')\cosh\gamma c}$$

$$+\frac{\cosh\gamma z}{(1+\kappa-\kappa')\sinh\gamma c}\Big\}\Big]F(\xi,\eta)\cos\alpha(x-\xi)\cos\beta(y-\eta)d\xi d\eta,$$

$$\widehat{xz}=-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty d\beta\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{\alpha}{\gamma}\Big\{\frac{\kappa'\sinh\gamma z-\gamma z\cosh\gamma z}{(1-\kappa+\kappa')\cosh\gamma c}+\frac{\kappa\cosh\gamma z-\gamma z\sinh\gamma z}{(1+\kappa-\kappa')\sinh\gamma c}\Big\}F(\xi,\eta)\sin\alpha(x-\xi)\cos\beta(y-\eta)d\xi d\eta,$$

$$\widehat{yz}=-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty d\beta\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{\beta}{\gamma}\Big\{\frac{\kappa'\sinh\gamma z-\gamma z\cosh\gamma z}{(1-\kappa+\kappa')\cosh\gamma c}+\frac{\kappa\cosh\gamma z-\gamma z\sinh\gamma z}{(1+\kappa-\kappa')\sinh\gamma c}\Big\}F(\xi,\eta)\cos\alpha(x-\xi)\sin\beta(y-\eta)d\xi d\eta,$$

$$\widehat{xy}=-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty d\beta\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\Big\{\frac{(1-2\nu-\kappa')\cosh\gamma z+\gamma z\sinh\gamma z}{(1-\kappa+\kappa')\cosh\gamma c}$$

$$+\frac{(1-2\nu-\kappa)\sinh\gamma z+\gamma z\cosh\gamma z}{(1+\kappa-\kappa')\sinh\gamma c}\Big\}F(\xi,\eta)\sin\alpha(x-\xi)\sin\beta(y-\eta)d\xi d\eta;$$

$$u=\frac{1}{4\pi^2\mu}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty d\beta\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{\alpha}{\gamma^2}\Big\{\frac{(1-2\nu-\kappa')\cosh\gamma z+\gamma z\sinh\gamma z}{(1-\kappa+\kappa')\cosh\gamma c}$$

$$+\frac{(1-2\nu-\kappa)\sinh\gamma z+\gamma z\cosh\gamma z}{(1+\kappa-\kappa')\sinh\gamma c}\Big\}F(\xi,\eta)\sin\alpha(x-\xi)\cos\beta(y-\eta)d\xi d\eta,$$

$$v=\frac{1}{4\pi^2\mu}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty d\beta\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{\beta}{\gamma^2}\Big\{\frac{(1-2\nu-\kappa')\cosh\gamma z+\gamma z\sinh\gamma z}{(1-\kappa+\kappa')\cosh\gamma c}$$

$$+\frac{(1-2\nu-\kappa)\sinh\gamma z+\gamma z\cosh\gamma z}{(1+\kappa-\kappa')\sinh\gamma c}\Big\}F(\xi,\eta)\cos\alpha(x-\xi)\sin\beta(y-\eta)d\xi d\eta,$$

$$w=\frac{1}{4\pi^2\mu}\int_0^\infty d\alpha\int_0^\infty d\beta\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{\gamma}\Big\{\frac{(2-2\nu+\kappa')\sinh\gamma z-\gamma z\cosh\gamma z}{(1-\kappa+\kappa')\cosh\gamma c}$$

$$+\frac{(2-2\nu+\kappa)\cosh\gamma z-\gamma z\sinh\gamma z}{(1+\kappa-\kappa')\sinh\gamma c}\Big\}F(\xi,\eta)\cos\alpha(x-\xi)\cos\beta(y-\eta)d\xi d\eta.$$

ここに　$\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$,　$\kappa=\gamma c\tanh\gamma c$,　$\kappa'=\gamma c\coth\gamma c$,　$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$.

この解の結果は

応力方程式：　$\dfrac{\partial\widehat{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\widehat{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\widehat{zx}}{\partial z}=0,\quad\cdots;$

Hooke 法則：　$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{E}\left\{\widehat{xx}-\nu(\widehat{yy}+\widehat{zz})\right\},\cdots,\ \dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}=\dfrac{2(1+\nu)}{E}\widehat{yz},\quad\cdots$

を満足し，かつ境界条件 (1) に合致していることが検してある．

外力 $F(x,y)$ がせん断力である場合も同様に計算して，結果が求めてある．

これらの結果において，$F(x,y)$ の函数形と分布領域を与え，解析的な方法で積分を遂行することは困難なようである．従って数値結果をうるには，数値積分法によらねばならないが，人手でこれを行うのは多くの労力を要するので，そのうち電子計算機によって数値結果を求める考えである．

昭和 34 年度科学研究費の配当をうけたことを付記して謝意を表する．