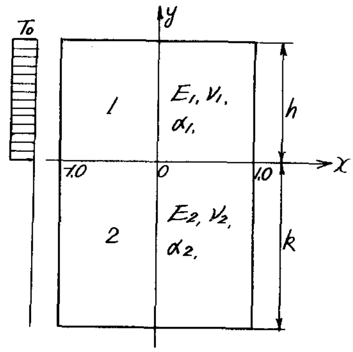
V－5　突合せた長い帯の熱応力状態

京都大学工学研究所　正員　森　忠次
京都大学大学院　正員　○小林昭一

1. 解法

図のように帯状板1および帯状板2（厚さはともにdとする）が$y=0$で突合されていて，帯状板1のみに一様な温度上昇T_0が生じ，平面応力状態にあるものとする。



$x=\pm 1$で拘束されてx方向の膨張がないとすると，帯状板1には圧縮応力$\bar{\sigma}_{x,1}=-\alpha_1 E_1 T_0$が生じ，帯状板2では$\bar{\sigma}_{x,2}=0$である。しかし，実際には$x=\pm 1$で拘束されていないから，拘束を解放する力，すなわち帯状板1の表面$x=\pm 1$上に引張力$p_{x,1}=\alpha_1 E_1 T_0$を作用させる必要がある。その場合に生じた応力を附加応力といい，それぞれ$\sigma^*_{x,1}$, $\sigma^*_{y,1}$ $\tau^*_{xy,1}$および$\sigma^*_{x,2}$, $\sigma^*_{y,2}$, $\tau^*_{xy,2}$とすると，熱応力は

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{x,1} &= \bar{\sigma}_{x,1}+\sigma^*_{x,1}, \quad \sigma_{y,1}=\sigma^*_{y,1}, \quad \tau_{xy,1}=\tau^*_{xy,1}\\
\sigma_{x,2} &= \bar{\sigma}_{x,2}+\sigma^*_{x,2}, \quad \sigma_{y,2}=\sigma^*_{y,2}, \quad \tau_{xy,2}=\tau^*_{xy,2}
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

で表わせる。

附加応力を求めるための応力函数は

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{\alpha_1 E_1 T_0}{2} y^2 + \sum_n f_n(x) g_{n,1}(y)\\
\Phi_2 &= \sum_n f_n(x) g_{n,2}(y)
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

とする。ここに，$g_{n,1}(y)$, $g_{n,2}(y)$は未知函数であり，$f_n(x)$は$y=$一定なる断面での合力が常に釣合っていることを考えて

$$f_n(\pm 1)=f_n'(\pm 1)=0$$

となるような正規直交函数であるとする。

potential energy 最小の原理を適用して

$$\delta V=\delta\left[\frac{d}{2E}\int_0^h\int_{-1}^{+1}\left\{\sigma_x^{*2}+\sigma_y^{*2}-2\nu\sigma_x^*\sigma_y^*+2(1+\nu)\tau_{xy}^{*2}\right\}dx\,dy-d\int_{-1}^{+1}\left\{\sigma_y^* v(x,0)+\tau_{xy}^* u(x,0)\right\}dx\right]=0$$

これに，上述の応力函数を用い，$f_n(x)$の性質を利用し，微小項を省略して，つぎの*Euler*の方程式を得る。

帯状板1については，

$$g_{n,1}^{IV}(y)-2\langle f_n'\cdot f_n'\rangle g_{n,1}''(y)+\langle f_n''f_n''\rangle g_{n,1}(y)=0 \qquad (3)$$

帯状板2については，

$$g_{n,2}^{IV}(y)-2\langle f_n'\cdot f_n\rangle g_{n,2}''(y)+\langle f_n''f_n''\rangle g_{n,2}(y)=0 \qquad (4)$$

この式の一般解は

$$y\geq 0\ ;\quad g_{n,1}(y)=e^{-\alpha_n y}(A_{n,1}\cos\beta_n y+B_{n,1}\sin\beta_n y)+e^{\alpha_n y}(C_{n,1}\cos\beta_n y+D_{n,1}\sin\beta_n y) \qquad (5)$$

$$y \leq 0\ ;\quad g_{n,2}(y)=e^{-\alpha_n y}(A_{n,2}\cos\beta_n y+B_{n,2}\sin\beta_n y)+e^{\alpha_n y}(C_{n,2}\cos\beta_n y+D_{n,2}\sin\beta_n y) \tag{6}$$

となる。

係数 A_n, B_n, C_n, D_n はつぎの条件から定められる。

$$\left.\begin{array}{lll} y=0\ で, & u_1=u_2,\ v_1=v_2, & \sigma_{y,1}^*=\sigma_{y,2}^*,\quad \tau_{xy,1}^*=\tau_{xy,2}^* \\ y=h\ で, & & \sigma_{y,1}^*=\tau_{xy,1}^*=0 \\ y=-k\ で, & & \sigma_{y,2}^*=\tau_{xy,2}^*=0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

ここに，u, v は，それぞれ x 方向および y 方向の変位を表す。

(7)式における変位，たとえば u_2 および v_2 についてはつぎのようにして求めることができる。

変位函数を ψ_2 とすると，

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\partial y}=\nabla^2\Phi_2=\sum_n f_n''(x)g_{n,2}(y)+\sum_n f_n(x)g_{n,2}''(y)$$

だから，
$$\psi_2=\sum_n f_n'(x)\tilde{g}_{n,2}(y)+\sum_n \tilde{f}_n(x)g_{n,2}'(y)+\sum_n \tilde{J}_n(x)+\sum_n \tilde{K}_n(y)$$

となり，変位は，

$$\left.\begin{array}{l} E_2u_2=-(1+\nu_2)\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=\sum_n\{\tilde{f}_n(x)g_{n,2}''(y)-\nu_2 f_n'(x)g_{n,2}(y)+K_n(y)\} \\ E_2v_2=-(1+\nu_2)\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y}+\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=\sum_n\{f_n''(x)\tilde{g}_{n,2}(y)-\nu_2 f_n(x)g_{n,2}'(y)+J_n(x)\} \end{array}\right\} \tag{8}$$

となる。ここに

$$\tilde{f}_n(x)=\int_0^x f_n(x)\,dx,\qquad \tilde{g}_{n,2}(y)=\int_0^y g_{n,2}(y)\,dy$$

である。$K_n(y)$，$J_n(x)$ は

$$\int_0^h\int_{-1}^{+1}\frac{E_2}{2(1+\nu_2)}\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)dx\,dy=\int_0^h\int_{-1}^{+1}\tau_{xy,2}^*\,dx\,dy \tag{9}$$

なる条件よりつぎのようになる。

$$J_n(x)=0$$
$$K_n(y)=\begin{cases} 0 & n:\text{偶数} \\ -\tilde{f}_n(1)g_{n,2}''(y)-f_n''(1)\tilde{g}_{n,2}(y) & n:\text{奇数} \end{cases}$$

したがって，$y=0$ における変位は，基準点を座標原点に取ると

$$E_2u_2=\sum_n\{\tilde{f}_n(x)g_{n,2}''(0)-\nu_2 f_n'(x)g_{n,2}(0)\}$$
$$E_2v_2=\sum_n\{f_n''(x)\tilde{g}_{n,2}(0)-\nu_2 f_n(x)g_{n,2}'(0)\}-\sum_n\{f_n''(0)\tilde{g}_{n,2}(0)-\nu_2 f_n(0)g_{n,2}'(0)\}$$

となる。

2. 計算例

つぎの場合について解析を行った。

i) $h=k=\infty$，$\nu_1=\nu_2=0$　$\kappa=\dfrac{E_1}{E_2}=0, \dfrac{1}{20}, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{2}, 1, 2, 5, 10, 20,$

ii) $h=1, 1/2, 1/4$，$k=\infty$，$\nu_1=\nu_2=0$，$\kappa=1$