V－3　中空薄円板の坐屈についての注意

○建設技術研究所　正会員　中田修三
信州大学工学部　正会員　谷本勉之助

円孔のある円板の坐屈の問題のうち，外縁の全円周において半径方向に作用する圧縮等分布荷重が作用しているときの坐屈の限界荷重を調べたものとしては，河本実氏（機械学会誌 39 巻（昭和 11 年）），岩藤重正氏（同誌 42 巻（昭和 14 年）），R.G. Olsson のもの（Timoshenko：" Theory of Plates and Shells," 1940, p.324 による）がある．私たちは同じ問題（図－1）を独立に調べたところ，Olsson の結果とは 20～30％ 異なった値を得た（図-2）．

さらにこの種の問題をとり扱う場合の微分方程式の特別解がどのような境界条件のとき必要であるかないかを明らかにし，その起りうるいろいろな場合の条件方程式を求めた．

この問題の微分方程式は，$\frac{dw}{dr}=\varphi$ をたわみ角として，

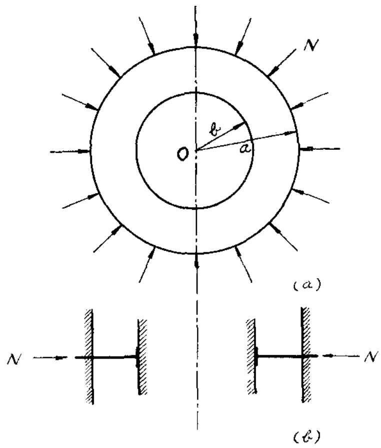
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{1}{t}\cdot\frac{d\varphi}{dt}+\left(1-\frac{k^2}{t^2}\right)\varphi=C\cdot\frac{1}{t} \tag{1}$$

となる．ここに

$$t=\alpha r,\quad \alpha^2=\frac{N}{D}\frac{\mu^2}{\mu^2-1},\quad \mu=\frac{a}{b},$$
$$k^2=1+\alpha^2 b^2,\qquad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

（E：ヤング率，ν：ポアソン比，h：板の厚さ）

で，N は全円周において半径方向に作用する圧縮等分布荷重を意味する．C は任意定数である．



図－1

この微分方程式の解は

$$\varphi(t)=AJ_k(t)+BJ_{-k}(t)+C\left\{L_{-k}(t)J_k(t)+L_k(t)J_{-k}(t)\right\}, \tag{2}$$

ここに

$$L_k(t)=\int_0^t J_k(t)\,dt,\qquad L_{-k}(t)=\int_0^t J_{-k}(t)\,dt.$$

境界条件（図－1 (a)）は

$$\left.\begin{array}{llll} r=a & で & \int\varphi\cdot dr=0, & \varphi=0; \\ r=b & で & \varphi=0, & \frac{d}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr}+\frac{1}{r}\varphi\right)=0. \end{array}\right\} \tag{3}$$

式(3)を使って式(2)に入れて常数 A, B, C に関する条件方程式を得て，これを整頓して

$$\begin{vmatrix} J_k(x) & J_{-k}(x) \\ J_k(\sqrt{k^2-1}) & J_{-k}(\sqrt{k^2-1}) \end{vmatrix}=0 \qquad (x=\sqrt{k^2-1}\cdot\mu) \tag{4}$$

をうる．ここで一般に限界荷重 N_{cr} を

$$N_{cr}=(k^2-1)(\mu^2-1)\frac{D}{a^2}=K\frac{D}{a^2} \tag{5}$$

とおけば，K が μ の函数となる．ある μ の値に対して K の値は無限に多く求められる．K の最小値が才1坐屈荷重を与える．

図-2の才1坐屈の曲線を近似的に式にすると

$$
\begin{aligned}
f(x)=\frac{1}{(1-x)^5}(&-55.571x^5+200.193x^4\\
&-243.457x^3+153.699x^2\\
&-63.379x+14.682),
\end{aligned}
$$

$$
(f(x)=K,\quad x=\frac{1}{\mu}). \qquad (6)
$$

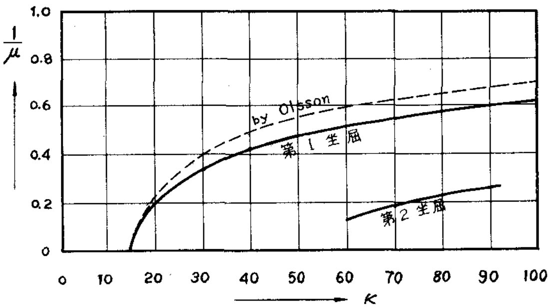


図-2

この式から次の表を得る:

a/b	2	3	4	5	8	10	∞
K	56.339	29.302	22.617	19.864	17.026	16.354	14.682

特別解の必要の有無の判別：例をとって説明する．

(a) 外縁固定，内縁自由

微分方程式(1)の左辺は，0となり $C=0$ であることを知る．よって式(1)はベッセルの微分方程式となって，この場合の μ を決定する条件方程式は

$$
\begin{vmatrix}
J_k(\sqrt{k^2-1}\cdot\mu) & J_{-k}(\sqrt{k^2-1}\cdot\mu)\\
\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}(k+\nu)J_k(\sqrt{k^2-1})-J_{k+1}(\sqrt{k^2-1}) & \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}(k\nu+1)J_{-k}(\sqrt{k^2-1})+J_{-(k+1)}(\sqrt{k^2-1})
\end{vmatrix}=0. \qquad (7)
$$

(b) 外縁固定，内縁固定

μ の値を決定する条件方程式は

$$
\begin{vmatrix}
J_k(\sqrt{k^2-1}\cdot\mu) & J_{-k}(\sqrt{k^2-1}\cdot\mu) & F_k(\sqrt{k^2-1}\cdot\mu)\\
L_k(\sqrt{k^2-1}\cdot\mu)-L_k(\sqrt{k^2-1}) & L_{-k}(\sqrt{k^2-1}\cdot\mu)-L_{-k}(\sqrt{k^2-1}) & \int_b^a F_k(t)\,dt\\
J_k(\sqrt{k^2-1}) & J_{-k}(\sqrt{k^2-1}) & F_k(\sqrt{k^2-1})
\end{vmatrix}=0, \qquad (8)
$$

ここに
$$
F_k(t)=\int_0^t\{L_{-k}(t)J_k(t)+L_k(t)J_{-k}(t)\}\,dt.
$$

以上の例から分るように境界条件 $\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr}+\frac{1}{r}\varphi\right)\right]_{r=b}=0$ が含まれる場合にはベッセルの微分方程式が使用され，これ以外の全ての場合に $C\neq 0$ となり特別解を必要とすることがわかる．以上論じた境界条件のほか，すべてこの問題に起りうる条件について μ を決定する条件方程式を求めてあるがここには記さない．

昭和34年度科学研究費の配当をうけたことに対して感謝する．