

III-42 平板性を考慮したケーソン構造物の解法

室蘭工業大学

正員 工博 能町 純雄

北海道土木部港湾課

正員

〇石倉 建治

著者は、さきにケーソンの側壁を鉛直方向にはカンティレバー性を、水平方向にはラーメン性を有するものと仮定し、平板の基礎微分方程式において撓みの項を省略し、撓みを x 方向には未知関数 $f(x)$ のみで、 y 方向にはカンティレバーの境界条件を満足する直交関数 Y_m のみで表わされる二つの関数の積をもって表わされるものとし、荷重項は Y_m で直交分解し、 $f(x)$ を求め、 $f(x)$ 中に含まれる積分未知数 B_m を板の両端の条件、すなわちラーメン性を満足するようにして決定し、こゝに撓み w 、モーメント M_x 、 M_y 等を求めることにつき述べ、且つ一部その実験も行った¹⁾。

今回は、同様の方法をもって、図-1 のようにケーソンが隔壁により多くの部屋に分割され、各底面は任意の形状をなし、且つ各隔壁には夫々任意の静水圧荷重がかかるときの一般解を求めた。

今、任意の隔壁 r について考える。基本微分方程式は

$$(1) \quad N \left(\frac{\partial^4 w^{(r,i)}}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w^{(r,i)}}{\partial y^4} \right) = q_{xy} = q_{ri} \left(1 - \frac{y}{b} \right)$$

こゝに、 N は板の曲げ剛さ、 q_{xy} は任意の荷重で

あるが、こゝでは q_{ri} を x に関する任意の関数と

する。その特別の場合が $q_{ri} = q = \text{const.}$ で静水圧荷重である。板 r の撓み $w^{(r,i)}$ を

$$(2) \quad w^{(r,i)} = \sum_m Y_m f_m^{(r,i)}(x)$$

とおく、但し、 Y_m は前述のような直交関数である¹⁾。(1)、(2) より

$$(3) \quad \sum_m Y_m \left(\frac{\partial^4 f_m^{(r,i)}}{\partial x^4} + \frac{\beta_m^4}{b^4} f_m^{(r,i)} \right) = \frac{q_{ri}}{N} \left(1 - \frac{y}{b} \right)$$

荷重項を Y_m で直交分解し、 $f_m^{(r,i)}$ の方程式を作れば、

$$(4) \quad \frac{\partial^4 f_m^{(r,i)}}{\partial x^4} + \frac{\beta_m^4}{b^4} f_m^{(r,i)} = \frac{q_{ri}}{N} \left(1 - \frac{y}{b} \right)$$

こゝで、板の境界条件は $x=0$ 、 $x=a$ で撓みがないから $f_{x=0}^{(r,i)} = f_{x=a}^{(r,i)} = 0$ である。然し、形状も荷重も x 方向には任意であるため、板の両端におけるモーメントは対称にはならない。従って、これらの条件を満足せしめる (4) の解は

$$(5) \quad f_m^{(r,i)}(x) = \frac{q_{ri} \cdot b^4}{N \beta_m^4} A_m (1 - Q_m^{(r,i)}(3)) - \frac{b^2}{\beta_m^2} H_m^{(r,i)}(1-3) \cdot B_{m,i} - \frac{b^2}{\beta_m^2} H_m^{(r,i)}(3) \cdot B_{m,r}^{(r,i)}$$

となる。こゝに

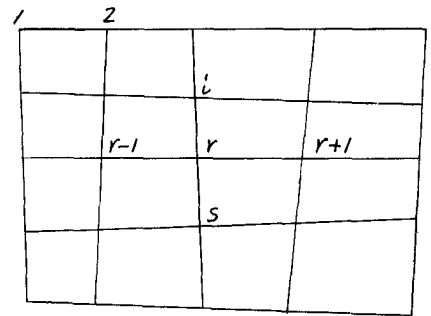


図-1

$$(6) \quad H_m(\bar{z}) = \frac{\sinh \frac{\pi C_m}{\sqrt{2}} (2-\bar{z}) \sin \frac{\pi C_m}{\sqrt{2}} \bar{z} - \sinh \frac{\pi C_m}{\sqrt{2}} \bar{z} \sin \frac{\pi C_m}{\sqrt{2}} (2-\bar{z})}{\cosh \sqrt{2} \pi C_m - \cos \sqrt{2} \pi C_m}, \quad \bar{z} = \frac{x}{a}, \quad \pi C_m = \frac{a}{b} \beta_m$$

故に、擾みは

$$(7) \quad \omega^{(r,i)} = b^2 \sum_m \frac{Y_m}{\beta_m^2} \left\{ \frac{g_{ri} b^2}{N} \cdot \frac{A_m}{\beta_m^2} (1 - Q_m(\bar{z})) - H_m(1-\bar{z}) \cdot B_{m,i}^{(r,i)} - H_m(\bar{z}) \cdot B_{m,r}^{(r,i)} \right\}$$

モーメントは

$$(8) \quad M_x^{(r,i)} = -N \frac{\partial^2 \omega^{(r,i)}}{\partial x^2} \\ = \sum_m Y_m \left\{ g_{ri} b^2 \frac{A_m}{\beta_m^2} P_m(\bar{z}) + G_m(1-\bar{z}) \cdot B_{m,i}^{(r,i)} - G_m(\bar{z}) \cdot B_{m,r}^{(r,i)} \right\}$$

$$(9) \quad M_y^{(r,i)} = -N \frac{\partial^2 \omega^{(r,i)}}{\partial y^2} \\ = - \sum_m Y_m'' \left\{ g_{ri} b^2 \frac{A_m}{\beta_m^2} (1 - Q_m(\bar{z})) - H_m(1-\bar{z}) \cdot B_{m,i}^{(r,i)} - H_m(\bar{z}) \cdot B_{m,r}^{(r,i)} \right\}$$

上式中、積分未知数 $B_{m,r}^{(r,i)}$, $B_{m,i}^{(r,i)}$ を決定するのに、板の両端 r, i における slope を夫々 θ_r, θ_i とすれば、それらは次式のように表わされる。

$$(10) \quad 2 J_1^{(r,i)} \cdot B_{m,i}^{(r,i)} - J_0^{(r,i)} \cdot B_{m,r}^{(r,i)} + \frac{g_{ri} b^2}{N} \cdot \frac{A_m}{\beta_m^2} \cdot K_0^{(r,i)} = \frac{\sqrt{2} \beta_m}{b} \cdot \theta_r$$

$$(11) \quad J_0^{(r,i)} \cdot B_{m,i}^{(r,i)} - 2 J_1^{(r,i)} \cdot B_{m,r}^{(r,i)} - \frac{g_{ri} b^2}{N} \cdot \frac{A_m}{\beta_m^2} \cdot K_0^{(r,i)} = \frac{\sqrt{2} \beta_m}{b} \cdot \theta_i$$

よって

$$(13) \quad \begin{cases} J_0^{(r,i)} = \frac{\sinh \sqrt{2} \pi C_m^{(r,i)} - \sin \sqrt{2} \pi C_m^{(r,i)}}{\cosh \sqrt{2} \pi C_m^{(r,i)} - \cos \sqrt{2} \pi C_m^{(r,i)}}, & J_1^{(r,i)} = \frac{\sinh \frac{\pi C_m^{(r,i)}}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi C_m^{(r,i)}}{\sqrt{2}} - \cosh \frac{\pi C_m^{(r,i)}}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi C_m^{(r,i)}}{\sqrt{2}}}{\cosh \sqrt{2} \pi C_m^{(r,i)} - \cos \sqrt{2} \pi C_m^{(r,i)}} \\ K_0^{(r,i)} = \frac{\sinh \frac{\pi C_m^{(r,i)}}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\pi C_m^{(r,i)}}{\sqrt{2}}}{\cosh \frac{\pi C_m^{(r,i)}}{\sqrt{2}} + \cos \frac{\pi C_m^{(r,i)}}{\sqrt{2}}} \end{cases}$$

(10), (11) より、板の両端 (又は節点) における積分未知数 $B_{m,r}^{(r,i)}$, $B_{m,i}^{(r,i)}$ を θ_r, θ_i で表わせば

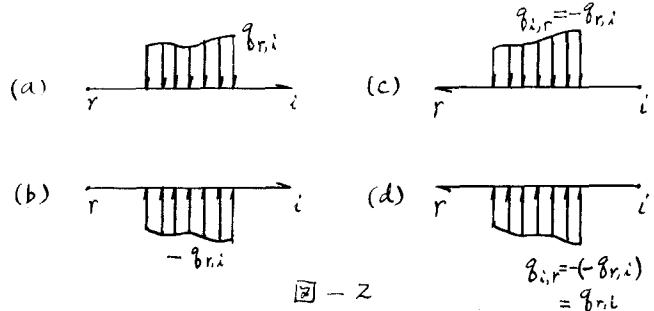
$$(14) \quad B_{m,r}^{(r,i)} = a_m^{(r,i)} \cdot \theta_r + b_m^{(r,i)} \cdot \theta_i - c_m^{(r,i)}$$

$$(15) \quad B_{m,i}^{(r,i)} = b_m^{(r,i)} \cdot \theta_r - a_m^{(r,i)} \cdot \theta_i - c_m^{(r,i)}$$

の形となる、故に

$$(16) \quad \begin{cases} a_m^{(r,i)} = a_m^{(i,r)} = \frac{\sqrt{2} \beta_m J_1^{(r,i)}}{b \{4(J_1^{(r,i)})^2 - (J_0^{(r,i)})^2\}}, & b_m^{(r,i)} = b_m^{(i,r)} = \frac{2\sqrt{2} \beta_m \cdot J_0^{(r,i)}}{b \{4(J_1^{(r,i)})^2 - (J_0^{(r,i)})^2\}} \\ c_m^{(r,i)} = -c_m^{(i,r)} = \frac{g_{ri} \cdot b^2 \cdot A_m}{N \beta_m^2} \cdot K_0^{(r,i)} \cdot \frac{2 J_1^{(r,i)} + J_0^{(r,i)}}{\{4(J_1^{(r,i)})^2 - (J_0^{(r,i)})^2\}} \end{cases}$$

ここで、 $c_m^{(r,i)}$, $c_m^{(i,r)}$ は荷重項で、座標の進行方向の左側に荷重があるときを正、右側にあるときを負と規約する。この関係は図一2(a), (b) 又は (c), (d) である。故に、 $c_m^{(r,i)}$ の中には g_{ri} の符号を含めて考える。又同一



図一2

の荷重状態であっても，図-2 (a)，(c) 又は (b)，
(d) のように座標の進行方向，換言すれば座標の原点
を r にとるか， i にとるかにより θ の符号を異にする。

以上の規約に従うこととして，図-1 の任意の板 r
 i の節点 r (図-3) におけるモーメントの総和が 0
という条件から (14) を用い

$$(17) \quad (a_m^{(r,i)} + a_m^{(r,r-1)} + a_m^{(r,s)} + a_m^{(r,r+1)}) \cdot \theta_r \\ + (b_m^{(r,i)} \cdot \theta_i + b_m^{(r,r-1)} \cdot \theta_{r-1} + b_m^{(r,r+1)} \cdot \theta_{r+1} + b_m^{(r,s)} \cdot \theta_s) \\ - (c_m^{(r,i)} + c_m^{(r,r-1)} + c_m^{(r,s)} + c_m^{(r,r+1)}) = 0$$

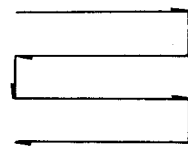
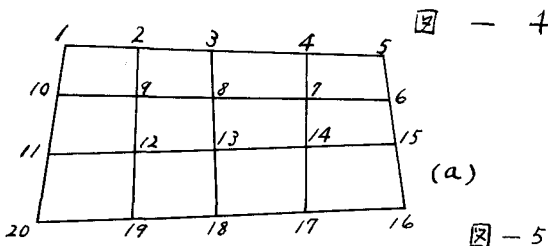
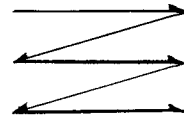
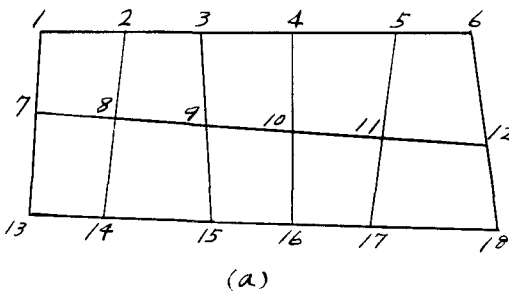
$$(18) \quad \begin{cases} a_m^{(r)} = a_m^{(r,i)} + a_m^{(r,r-1)} + a_m^{(r,s)} + a_m^{(r,r+1)} \\ c_m^{(r)} = c_m^{(r,i)} + c_m^{(r,r-1)} + c_m^{(r,s)} + c_m^{(r,r+1)} \end{cases}$$

とおけば，

$$(19) \quad b_m^{(r,i)} \cdot \theta_i + b_m^{(r,r-1)} \cdot \theta_{r-1} + a_m^{(r)} \cdot \theta_r + b_m^{(r,r+1)} \cdot \theta_{r+1} + b_m^{(r,s)} \cdot \theta_s = c_m^{(r)}$$

これは恰も *joint equation* に相当するもので，方程式の数は，未知数である節点に
おける *slope* θ の数と一致する。故にこの連立方程式は解かれる。そして， θ に関する連
立方程式の各係数の間には一定の規則正しい法則が成立し，従って，機械的作表法が可能
となるもので，その一例として，図-4 (a) の場合 (節点番号のつけ方は図-4 (b)) は
表-1 のようになる。番号を図-5 のようにすれば，表-2 のような形となる。

θ を求めれば，(14)，(15) により積分未知数 B_m が求まり，これが求まれば，(7) によ
り撓み δ が，(8)，(9) によりモーメントが求まる。ケーソンの形状，荷重が対称のと
きは未知数 θ は $1/2$ 以下になり，表は極めて簡単となる。但し， δ や B_m は無限級数であ
る。



番号	方程式左辺																		右辺
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8	θ_9	θ_{10}	θ_{11}	θ_{12}	θ_{13}	θ_{14}	θ_{15}	θ_{16}	θ_{17}	θ_{18}	$C_m^{(1)}$
1	$a_m^{(1)}$	$b_m^{(2)}$					$b_m^{(1,2)}$												$C_m^{(1)}$
2	$b_m^{(2,2)}$	$a_m^{(2)}$	$b_m^{(2,3)}$					$b_m^{(2,8)}$											$C_m^{(2)}$
3		$b_m^{(2,3)}$	$a_m^{(3)}$	$b_m^{(3,4)}$					$b_m^{(3,7)}$										$C_m^{(3)}$
4			$b_m^{(3,7)}$	$a_m^{(4)}$	$b_m^{(4,5)}$					$b_m^{(4,10)}$									
5				$b_m^{(4,5)}$	$a_m^{(5)}$	$b_m^{(5,6)}$					$b_m^{(5,10)}$								
6					$b_m^{(5,6)}$	$a_m^{(6)}$	$b_m^{(6,7)}$					$b_m^{(6,13)}$							
7	$b_m^{(6,7)}$					$b_m^{(6,7)}$	$a_m^{(7)}$	$b_m^{(7,8)}$					$b_m^{(7,13)}$						
8		$b_m^{(7,8)}$					$b_m^{(7,8)}$	$a_m^{(8)}$	$b_m^{(8,9)}$					$b_m^{(8,16)}$					
9			$b_m^{(8,9)}$					$b_m^{(8,9)}$	$a_m^{(9)}$	$b_m^{(9,10)}$					$b_m^{(9,15)}$				$C_m^{(9)}$
10				$b_m^{(9,10)}$				$b_m^{(9,10)}$	$a_m^{(10)}$	$b_m^{(10,11)}$						$b_m^{(10,16)}$			$C_m^{(10)}$
11					$b_m^{(10,11)}$				$b_m^{(10,11)}$	$a_m^{(11)}$	$b_m^{(11,12)}$						$b_m^{(11,17)}$		
12						$b_m^{(11,12)}$				$b_m^{(11,12)}$	$a_m^{(12)}$	$b_m^{(12,13)}$						$b_m^{(12,18)}$	
13							$b_m^{(12,13)}$				$b_m^{(12,13)}$	$a_m^{(13)}$	$b_m^{(13,14)}$						
14								$b_m^{(13,14)}$				$b_m^{(13,14)}$	$a_m^{(14)}$	$b_m^{(14,15)}$					
15									$b_m^{(14,15)}$				$b_m^{(14,15)}$	$a_m^{(15)}$	$b_m^{(15,16)}$				
16										$b_m^{(15,16)}$				$b_m^{(15,16)}$	$a_m^{(16)}$	$b_m^{(16,17)}$			$C_m^{(16)}$
17											$b_m^{(16,17)}$				$b_m^{(16,17)}$	$a_m^{(17)}$	$b_m^{(17,18)}$		$C_m^{(17)}$
18												$b_m^{(17,18)}$				$b_m^{(17,18)}$	$a_m^{(18)}$		$C_m^{(18)}$

表 - 1

- 1) 能町純雄, 石倉建治: ケーソン構造物の実用的近似解法とその実験について 技術資料(土木学会北海道支部) 第16号 昭35.2

番号	方程式左辺																		右辺
	θ_1	θ_2					θ_i											θ_n	$C_m^{(n)}$
1																			
2																			
⋮																			
i																			
⋮																			
n																			

表 - 2