Ⅲ－16　背水曲線に関する一考察

中央大学工学部　正員　春日屋　伸昌

開水路不等流の基本方程式は，流量をQ，流水断面積をA，径深をR，底こう配をi，水深をh，シェジーの流速係数をCとし，流れの方向にx軸をとるが，底こう配がある程度小さければ，αを補正係数として，

$$i-\frac{dh}{dx}=\alpha\frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{2gA^2}\right)+\frac{Q^2}{C^2RA^2} \tag{1}$$

平均流速公式としてマニング公式を用い，同公式中の粗度係数nが水深に関して定数であると仮定すれば，（１）式はつぎのように変形される。

$$i\,dx=\frac{1-(B/B_c)(A_c/A)^3}{1-(R_0/R)^{\frac{4}{3}}(A_0/A)^2}\,dh \tag{2}$$

ここに，Bは水深がhのときの水面幅，A_0，R_0はそれぞれ等流水深h_0に対する流水断面積および径深，A_c，B_cはそれぞれ限界水深h_cに対する流水断面積および水面幅である。

一様断面水路における不等流の水面形状を求めるには，（２）式を積分すればよいが，これは一般に不可能であるので，適当な仮定を設けて積分することとなる。たとえば，幅広長方形断面に対し$C=C_0$（C_0は等流時のCの値）と仮定すればブレッセの公式がえられ，幅広放物線形断面に対し$C=C_0$と仮定すればトルクミットの公式がえられる。

現在最も合理的といわれているものに，物部，バクメテフおよびチョーの各公式がある。物部の公式では，流水断面積Aおよび潤辺Pをいずれも水深hのベキ函数で表わして，

$$A\propto h^s\ ,\ P\propto h^k \tag{3}$$

とおいた。ここで，$h/h_0=u$とすれば，（２）式はつぎのように書かれる。

$$\frac{i}{h_0}dx=\frac{u^N}{u^N-1}du-K\frac{u^{N-2s-1}}{u^N-1}du\ \left(N=\frac{10}{3}s-\frac{4}{3}k,\ K=\alpha s\frac{Q^2}{gh_0A_0^2}\right) \tag{4}$$

物部氏は積分区間でs，kが定数であると仮定して，（４）式を$u>1$の場合と$u<1$の場合とにわけて積分し，右辺の第１項および第２項の積分値をそれぞれ図示した。

バクメテフは物部氏と同じ仮定を設けかつ水深hに対する限界こう配をi_cとすれば$K\times u^{N-2s-1}=i/i_c$となることから，i_cを積分区間で定数と仮定して，（４）式を積分した。

チョーはバクメテフが定義した conveyance function $CA\sqrt{R}$ および section factor $A\sqrt{A/B}$ がいずれも水深hのベキ函数で表わされるとの仮定に基づいて（２）式を積分したが，これは物部氏の仮定と本質的に少しもかわらないから，筆者は物部氏の仮定を出発点としてチョーと同じ公式を誘導することとする。

まず，$A_c=\sqrt[3]{\alpha Q^2B_c/g}$を用いて物部の公式中の定数$K$を書きかえると，

$$K=\alpha s\frac{Q^2}{gh_0A_0^2}=\frac{sA_c^3}{h_0A_0^2B_c}=\frac{sA_c^3}{h_0A_0^2(dA/dh)_c}=\frac{sA_c^3}{h_0A_0^2(A_0sh_c^{s-1}/h_0^s)}=\left(\frac{h_c}{h_0}\right)^{1-s}\left(\frac{A_c}{A_0}\right)^3=\left(\frac{h_c}{h_0}\right)^M\ (M=2s+1) \tag{5}$$

また，（４）式の右辺の各項は，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{u^N}{u^N-1}du=\left(1-\frac{1}{1-u^N}\right)du,\ \frac{u^{N-2s-1}}{u^N-1}du=\frac{u^{N-M}}{u^N-1}du=\frac{-1}{N-M+1}\,\frac{dv}{1-v^J}\\&\qquad\qquad v=u^{N-M+1},\ J=\frac{N}{N-M+1}\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

となるから，(4)式は，

$$\frac{i}{h_0}dx=du-\frac{du}{1-u^N}+\frac{1}{N-M+1}\left(\frac{h_c}{h_0}\right)^M\frac{dv}{1-v^J}\tag{7}$$

(7)式をxに関しては0からℓまで，uに関してはuからu_1まであるいはu_1からuまで積分すれば，

$$\frac{i\ell}{h_0}=\left|\int_u^{u_1}du-\int_u^{u_1}\frac{du}{1-u^N}+\frac{1}{N-M+1}\left(\frac{h_c}{h_0}\right)^M\int_v^{v_1}\frac{dv}{1-v^J}\right|\tag{8}$$

ここに，添数1は既知の水深に対する値を意味し，ℓは既知断面とhを適当に仮定した断面との距離を表わす。

いま，$u<1$の場合と$u>1$の場合とに対してそれぞれつぎの不等流函数，

$$F(u,N)=\int_0^u\frac{du}{1-u^N}\ (u<1),\quad F(u,N)=\int_\infty^u\frac{du}{1-u^N}\ (u>1)\tag{9}$$

を定義すれば，つぎの公式を導くことができる。

$$\ell=\frac{h_0}{i}\left|(u_1-u)-\{F(u_1,N)-F(u,N)\}+\frac{1}{N-M+1}\left(\frac{h_c}{h_0}\right)^M\{F(v_1,J)-F(v,J)\}\right|\tag{10}$$

(10)式は堰上げ背水や低下背水のみならず，すべての不等流に対して使用できる。

放物線形断面に対しては，$s=3/2$であって，$R\propto h$と考えてよいから$k\fallingdotseq 1/2$である。ゆえに，$N=13/3, M=4, J=13/4$となるから，$v=u^{\frac{4}{3}}$とおいて，(10)式は，

$$\ell=\frac{h_0}{i}\left|(u_1-u)-\{F(u_1,\tfrac{13}{3})-F(u,\tfrac{13}{3})\}+\frac{3}{4}\left(\frac{h_c}{h_0}\right)^4\{F(v_1,\tfrac{13}{4})-F(v,\tfrac{13}{4})\}\right|\tag{11}$$

三角形断面に対しては，$s=2, k=1$であるから，$v=u^{\frac{4}{3}}$とおいて，

$$\ell=\frac{h_0}{i}\left|(u_1-u)-\{F(u_1,\tfrac{16}{3})-F(u,\tfrac{16}{3})\}+\frac{3}{4}\left(\frac{h_c}{h_0}\right)^5\{F(v_1,4)-F(v,4)\}\right|\tag{12}$$

幅広長方形断面に対しては，$s=1, k\fallingdotseq 0$であるから，$v=u^{\frac{4}{3}}$とおいて，

$$\ell=\frac{h_0}{i}\left|(u_1-u)-\{F(u_1,\tfrac{10}{3})-F(u,\tfrac{10}{3})\}+\frac{3}{4}\left(\frac{h_c}{h_0}\right)^3\{F(v_1,2)-F(v,2)\}\right|\tag{13}$$

その他の断面形に対するs，kの値は，つぎの式より計算される。

$$s=d\ln A/d\ln h\ ,\quad k=d\ln P/d\ln h\tag{14}$$

長方形(幅b)，台形(底幅b)および円形(直径d)に関するs，kの値はつぎのようになる。

長方形；$s=1$，$k=\frac{2(h/b)}{1+2(h/b)}$　台形；$s=1+\frac{m(h/b)}{1+m(h/b)}$，$k=\frac{2\sqrt{1+m^2}(h/b)}{1+2\sqrt{1+m^2}(h/b)}$

円形；$s=\frac{2\sin\varphi(1-\cos\varphi)}{\varphi-\sin\varphi\cos\varphi}$，$k=\frac{1-\cos\varphi}{\varphi\sin\varphi}$（$m$は側壁のこう配，$\varphi$は水面幅に対する中心角をラジアンで表わしたもので，$h/d=(1-\cos\varphi)/2$の関係がある。）

チョーは(9)式の値を$N=2.2(0.2)4.2, 4.6(0.4)9.8$について表示し，筆者は(11)～(13)式に便利なように，$N=2, 13/4, 10/3, 13/3, 16/3$について目下計算中である。