

III-13 対数正規法と Return Period

京都大学防災研究所 正員 角屋 睦

水文量の非対称分布に対数正規分布を適用する問題については、これまでに数多くの注目すべき研究がなされてきており、間然できることはあまり多くはないが、なお2, 3の問題点、特に return period の推定方法などについて若干論及する。

1. 分布形式の統一

対数正規分布の形式としては種々のものが考えられるが、代表的な形式は

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (1)$$

$$\xi = \alpha \log \frac{x+b}{x_0+b} = \alpha(x-x_0), \quad x = \log(x+b), \quad -b < x < \infty \quad (2)$$

$$\xi = \alpha \log \frac{x}{x_0} \frac{g-x_0}{g-x}, \quad 0 < x < g \quad (3)$$

これまで上下限値を有する点であたかも実際のとの錯覚によつて、(3)式の形式の適用を推奨する向きもあつたが、これはあまり意味はない。(3)式の形式が成立するのは、データを対数確率紙にプロットした場合、図1 B曲線状を呈するデータに限る。(2)式の形式を適用すれば、B曲線状を示すデータでは $b > 0$ 、A曲線状を示すデータでは $b < 0$ がそれぞれ対応する。一般にはA曲線状を示すデータが多い。著者は、特別な理由がない限り、下限値 $-b$ の正負に拘らないとの条件の下に、(2)式の形式を主用することを提案したい。

2. 対数正規分布の解法

対数正規分布の解法についてはかなりの研究がなされてきたが結局はつぎの3法に帰結する

2.1. 積率解 — 現今のところ石原・高瀬の方法が最良である。Slade, Hazen 等も結局は同様な解を求めた筈であるが、前者に及ばない。たゞ同法で標本ヒズミ係数 C_s は

$$C_s = \frac{\frac{1}{n} \sum (x-\bar{x})^3}{\left[\frac{1}{n-1} \sum (x-\bar{x})^2 \right]^{3/2}} \rightarrow \frac{\frac{1}{n} \sum (x-\bar{x})^3}{\left[\frac{1}{n} \sum (x-\bar{x})^2 \right]^{3/2}} = \frac{\bar{x}^3 - 3\bar{x}^2\bar{x} + 2\bar{x}^3}{(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)^{3/2}} \quad (4)$$

とした方がよいと思うが、本質的な問題ではない。

2.2. 岩井法 — 理論的に簡明な方法であるが、2, 3改良する方がよい。

(i) x_0 ; $\log x_0 \div \frac{1}{n} \sum \log x_i$ は x_0 のよい近似値として、後に得られる $\log(x_0+b) = \frac{1}{n} \sum \log(x_i+b)$ の x_0 をあらためて x_0 の推定値とするのが望ましい。

(ii) b ; $-b > 0$ の条件は除きすべきである。

(iii) $1/\alpha$; $1/\alpha = \sqrt{\frac{n}{n-1}} S_x = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \sqrt{\bar{x}^2 - \bar{x}^2}$ とする。ただし $\bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum [\log(x_i+b)]^2$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum \log(x_i+b)$

2.3. 順序確率法 — 著者の提案による本法は、高瀬の提示した有用な数表により著しく簡易化された。たゞ本法本来の意味より Thomas Plot による解を建前とする。

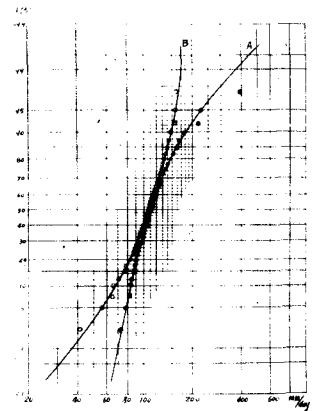


図1 対数正規分布形式

3. Return Period

3.1. 従来の方法 — 従来の確率水文学の推定は超過確率すなわち α を与えて

$$\log(x+b) = \log(x_0+b) + \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha e^{-x} dx \rightarrow x \quad (5)$$

これは平均的な意味での確率水文学を推定していることにはなるが、数十年内に極めて稀な値が入る可能性を論じることにはできない。実際には常設推定の精度の問題もあってむづかしいが、一応 return period の推定に近代推計学の思想を取入れたい。2, 3 の方法を示す。

3.2. 変動域法 — (省略)

3.3. 棄却限界法 — 正規変量に関する Thompson の意味での棄却限界の理論を準用する。1/ε 年確率水文学は

$$X = \bar{X} \pm S_x \sqrt{\frac{n+1}{n-1} F'_{n-1}(2\epsilon)} \quad (6)$$

上式中 $F'_{n-1}(2\epsilon)$ は自由度 1, $n-1$ の F 分布で両側危険率 2ϵ に対応する値である (右表参照)。2.2, 2.3 の方法では $S_x \approx 1/\sqrt{2\epsilon}$ としてよいであろう。なおこの方法はデータの棄却検定にそのまま利用される。2.1 の方法で $C_s > 2$ のときは一応上式で検定を行う態度が望ましい。

3.4. 信頼域法 — 母分布の信頼限界を考える。すなわち

$$\left. \begin{aligned} P_r(\xi_i \leq \xi_{\beta_1}, \text{ or } F_i \leq F_{\beta_1}) &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)} \int_0^{\beta_1} F^{i-1} (1-F)^{n-i} dF = \beta_1 \quad (\text{片側危険率}) \\ P_r(\xi_i \geq \xi_{\beta_2}, \text{ or } F_i \geq F_{\beta_2}) &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)} \int_{\beta_2}^1 F^{i-1} (1-F)^{n-i} dF = \beta_2 \quad (\text{片側危険率}) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を満足する ξ または F の値を求めればよい。図 2 にその主な値を示す。実際には n を媒介変数と考えて、理論曲線の上下に所与の β に対する ξ をとればよい。

図 3 には、2.1 による解 (I.T.M.), 3.3 (R.M.), 3.4 ($\beta=0.1$) の適用例が示してある。

表 棄却限界法 (I.T.M.) の値

N-1	片側危険率 ϵ					
	25%	12.5%	5%	2.5%	1.25%	0.5%
10	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
20	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
30	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
40	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
50	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
60	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
70	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
80	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
90	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
100	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
110	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
120	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
130	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
140	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
150	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
160	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
170	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
180	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
190	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
200	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
210	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
220	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
230	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
240	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
250	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
260	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
270	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
280	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
290	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
300	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
310	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
320	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
330	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
340	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
350	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
360	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
370	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
380	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
390	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
400	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
410	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
420	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
430	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
440	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
450	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
460	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
470	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
480	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
490	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053
500	0.7265	1.256	1.834	2.224	2.541	3.053

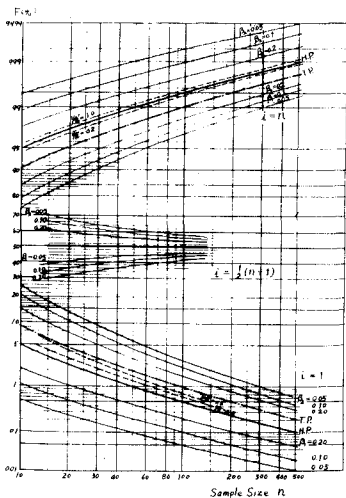


図 2-1 対数正規変数信頼限界

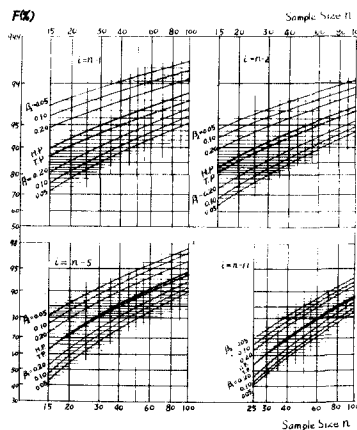


図 2-2 対数正規変数信頼限界

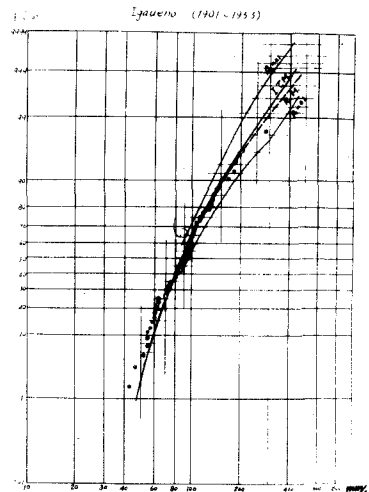


図 3 適用例