

II-13 アーチの極限耐荷力に関する研究

東京大学工学部 正員 工博 奥村 敏恵
 櫻田機械工業 正員 前田 幸雄
 首都高速道路公団 正員 ○ 大久保 禎

アーチの極限耐荷力に関しては既に W. Swida, A.W. Hendry, E.T. Onat と W. Prager, L.K. Stevens, P.G. Hodge 等によって研究され、その成果が発表されている。これまでの論文はすべてアーチがその面内に完全な塑性ヒンジを生じて崩壊するものと考え、その崩壊理論式を展開している。アーチの極限耐荷力という立場からアーチの崩壊現象を考察してみると、面内で塑性ヒンジを生じて崩壊する場合が最大の耐荷力を示すであろうと思はれるが、それはアーチが横座屈も局部座屈もしないという前提が必要である。もし一つの箇所では塑性ヒンジを生ずると、その点では回転に対する抵抗を失う結果新しい状態になると考えねばならない。即ち撓の増大の影響を考慮せねばならない。これは上述の座屈の危険性をもたらす。特にアーチが長大支間となり、一方幅員が制限されてくると、横座屈を度外視するわけにはいかない。このため横座屈と塑性崩壊の2つの条件より最も経済的な断面を求めることが実用上重要なこととなる。このような問題を処理する態度として、応力状態に関する条件式、塑性崩壊条件式、座屈条件式を関連させる方法をとると、仮想変位の原理を用いて崩壊荷重を求め、一方座屈条件式よりその制限を考へる方法と2通りある。ここでは後者を選んだ。なお8組の試験体をつくり、荷重条件および立端条件を変えてその崩壊性状および崩壊条件を調べた。これらの結果について以下簡単に説明しよう。なお円形アーチを実例の対象に選んだ。

軸方向力および曲げモーメントを受ける部材の塑性崩壊条件とそれに関係した性質

これについては既に多くの論文で詳述されているので簡単に述べる。即ち部材に働く軸方向力 N 、曲げモーメントを M とし、断面が完全に塑性状態に至る場合の軸方向力を N_0 、曲げモーメントを M_0 とし、 $n = N/N_0$ 、 $m = M/M_0$ とおくと、

$$r_1 m + r_2 n^2 = 1 \quad (1)$$

が崩壊条件式となる。但し r_1, r_2 は断面の形状、応力の状態に関係する値である。これ

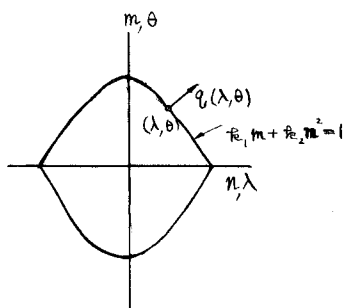


図-1

を図示すると図-1となる。一方断面の中立軸に於ける垂直歪 λ 、回転角 θ とする。 $\lambda = N_0 \lambda / M_0$ とおくと、内力は事 W_i は

$$W_i = M_0 (m \theta + n \lambda) \quad (2)$$

とおくことができる。このような θ と λ でありはされる座標系を (n, m) の座標系を重ねて示すと、歪ベクトルと $n-m$ 相関曲線が直交するという性質が証明される。即ち

$$\frac{\theta}{\lambda} \cdot \frac{dm}{dn} = -1 \quad (3)$$

$$\text{又は} \quad \lambda = \frac{2 r_2}{r_1} m \theta \quad (4)$$

円形アーチの塑性崩壊荷重の算定

円形2ヒンジアーチに任意の点に集中荷重を受ける場合を例にとりて計算する。他の条件も同様にして計算することが出来る。図-2に示すように荷重Pがアーチの中央から ϕ_0 はなれた点に作用し、アーチの中央より ϕ_1 , ϕ_2 なる角度の位置①および②に塑性ヒンジが生じ、アーチが崩壊するものと考える。

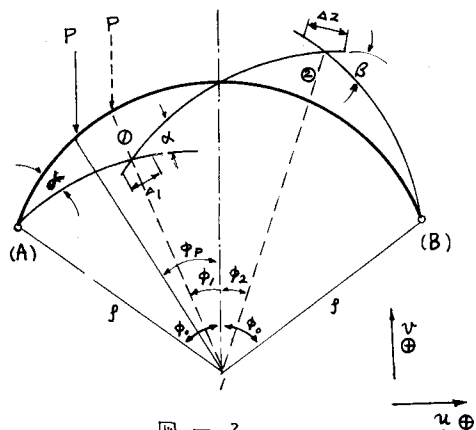


図-2

支点Bの水平変位 u および垂直変位 v が0である条件より、

$$u = \alpha R (\cos \phi_1 - \cos \phi_0) - \Delta_1 \cos \phi_1 - \beta R (\cos \phi_2 - \cos \phi_0) - \Delta_2 \cos \phi_2 = 0$$

$$v = -2R \sin \phi_0 + \alpha R (\sin \phi_0 + \sin \phi_1) - \Delta_1 \sin \phi_1 - \beta R (\sin \phi_0 - \sin \phi_2) + \Delta_2 \sin \phi_2 = 0$$

$$\alpha = \theta_1$$

$$\Delta_1 = -\Lambda_1 = -\frac{M_0}{N_0} \lambda_1 = -\frac{M_0}{N_0} \frac{2R_2}{R_1} \theta_1$$

$$\beta = -\theta_2$$

$$\Delta_2 = -\Lambda_2 = +\frac{M_0}{N_0} \frac{2R_2}{R_1} \theta_2$$

これより

$$\theta_1 = \frac{\{(4RKn-1) \cos \phi_2 + \cos \phi_0\}}{\{(4RKn+1) \cos \phi_1 - \cos \phi_0\}} \theta_2 \quad \text{----- (5)}$$

ここには $R = M_0 / 2PN_0$, $K = R_2 / R_1$ とおく。

$$\gamma = \frac{\theta_2}{2\{(1+RKn) \cos \phi_1 - \cos \phi_0\} \sin \phi_0} \left[\{(4RKn-1) \cos \phi_2 + \cos \phi_0\} \sin \phi_1 (1+RKn) + \sin \phi_0 \right] + \sin \phi_2 (4RKn-1) + \sin \phi_0 \{(1+RKn) \cos \phi_1 - \cos \phi_0\} \quad \text{----- (6)}$$

崩壊荷重の算定に必要となる $\phi_1 \geq \phi_1$ である場合を考へる。

$\phi_1 = \phi_1$ の場合

$$\text{外力仕事 } W_e = P \{ \gamma R (\sin \phi_0 - \sin \phi_1) + \Delta_1 / 2 \sin \phi_1 \}$$

$$\text{内力仕事 } W_i = M_0 \{ \theta_1 (1+Kn_1^2) - \theta_2 (1+Kn_2^2) \}$$

これより

$$P = \frac{2M_0}{R} \sin \phi_0 \left\{ (4RKn-1) \cos \phi_2 + 2 \cos \phi_0 - (1+4RKn) \cos \phi_1 \right\} \left\{ (\sin \phi_0 - \sin \phi_1) \left[\{(4RKn-1) \cos \phi_2 + \cos \phi_0\} \sin \phi_1 (1+4RKn) + \sin \phi_0 \right] + \sin \phi_2 (4RKn-1) + \sin \phi_0 \{(1+4RKn) \cos \phi_1 - \cos \phi_0\} \right\}^{-1} - 4RKn \sin \phi_0 \sin \phi_1 \{(4RKn-1) \cos \phi_2 + \cos \phi_0\} \quad \text{----- (7)}$$

$\phi_1 > \phi_1$ の場合

同様にして

$$P = \frac{2M_0}{R} \frac{\sin \phi_0 \{ (4RKn-1) \cos \phi_2 + 2 \cos \phi_0 - (1+4RKn) \cos \phi_1 \}}{(\sin \phi_0 - \sin \phi_1) \left[\{(4RKn-1) \cos \phi_2 + \cos \phi_0\} \sin \phi_1 (1+4RKn) + \sin \phi_0 \right] + \sin \phi_2 (4RKn-1) + \sin \phi_0 \{(1+4RKn) \cos \phi_1 - \cos \phi_0\}} \quad \text{----- (8)}$$

(7), (8) の式中 θ_1, θ_2 の組合せは無限にあり、この式のみでは決定できないので、偏心載荷の

場合も曲ゲモ- $x=0$ のアーチの前後を支配すると考え、弾性方程式により最大曲ゲモ- $x=0$ の生ずる位置を求め、その点からアーチの中心より支点A側に支れは ϕ_1 、支点B側に支れは ϕ_2 とし、上式に代入し ϕ_2 (又は ϕ_1)を変化させて p の最小値を求める。

この場合最大曲ゲモ- $x=0$ の生ずる位置中は次式より求められる。

$$\frac{(\sin \phi_0 - \sin \phi_p)}{\sin \phi_0} \cos \phi + \frac{p^2 [\sin^2 \phi_0 - \sin^2 \phi_p - 2 \cos \phi_0 (\phi_0 \sin \phi_0 - \phi_p \sin \phi_p - \cos \phi_p + \cos \phi_0 \sin \phi)]}{p^2 (\phi_0 - 3 \cos \phi_0 \sin \phi_0 + 2 \phi_0 \cos \phi_0) + (\frac{1}{p}) \phi_0 \cos \phi_0} = 0 \quad \dots (9)$$

一般に ϕ_p が小さい場合は $\phi_1 > \phi_p$ となり、荷重の下の1つの塑性ヒンジが生じ、その左の ϕ_2 の位置に一つ一つの塑性ヒンジが生ずる。この代表的な例がアーチの頂上に集中荷重が作用した場合である。左右軸方向力の影響を無視して考えれば、一般にアーチが集中荷重を受ける場合曲ゲモ- $x=0$ によってもよるに比べ軸方向力によってもよるものは少なくて、一般に η の値は0.05~0.2の範囲で考えればよい。

左半部分荷重を受ける場合も同様にして計算できる。ヒンジが生ずる位置を X とすると、前後部分荷重は次式で与えられる。

$$q = M_0 \left\{ (1 + K \eta_1^2) \left\{ \cos(\phi_0 - X)(1 - 4 \eta K \eta) - \cos \phi_0 \right\} - (1 + K \eta_2^2) \left\{ \cos \phi_0 - (1 - 4 \eta K \eta) \right\} \right\} \times p^2 \times \left\{ (1 - 4 \eta K \eta) \left\{ \sin(\phi_0 - X)(1 + 4 \eta K \eta) + \sin X \right\} - (\cos \phi_0 - (1 - 4 \eta K \eta)) \left\{ \sin \phi_0 - \sin(\phi_0 - X) \right\} \right\} \left\{ 4 \eta K \eta \sin(\phi_0 - X) + \frac{\sin \phi_0 - \sin(\phi_0 - X)}{2} \right\} - \sin \phi_0 \left\{ (1 + 4 \eta K \eta) + \frac{\sin \phi_0}{2} \left\{ \cos(\phi_0 - X)(1 - 4 \eta K \eta) - \cos \phi_0 \right\} \right\} \right\}^{-1} \quad \dots (10)$$

横座屈を支配する条件

アーチが横座屈して横方向にわずかに撓むとし、そのわずかな撓みによる歪エネルギーの増加量 ΔV と横座屈による外力仕事 ΔU の増加量が等しいと仮定して横座屈前後荷重を求める。

即ち横座屈による歪エネルギーの増加量 ΔV は、 M とアーチの任意の点の横座屈による曲ゲモ- $x=0$ 、 T と撓りモ- $x=0$ とし、 B_2 とアーチ断面の断面に垂直な軸に於ける曲げ剛性、 C と撓り剛性とすると

$$\Delta V = 2 \left\{ \frac{1}{2 B_2} \int_0^{\phi_0} M^2 p d\phi + \frac{1}{2 C} \int_0^{\phi_0} T^2 p d\phi \right\} \quad \dots (11)$$

一方横座屈による外力仕事 ΔU は、

$$\Delta U = \sum p_i (v_{i1} + v_{i2}) \quad \dots (12)$$

ここに v_{i1} はアーチが横方向に曲ることによる荷重作用点の鉛直移動量であり、 v_{i2} はアーチが横方向に撓んでもアーチの軸長は変らないことによる荷重の作用点の鉛直移動量である。即ちアーチの支点が水平方向に自由に動き得るとすれば横方向に撓むための支点にはわずかな中央の方向移動し支間が短くなるばかりである。しかし実際は支点は固定で支間より軸長が変化するに於てはとるべき鉛直移動量は増加する。また円形アーチの撓み曲線 $u = f(\phi)$ と仮定すれば $\Delta U = \Delta V$ より横座屈値を求めることができる。 v_{i1} は荷重点の横移動量を δ とすると、 $v_{i1} = \delta^2 \pi^2 / 16 p (\cos \phi_i - \cos \phi_0)$ で与えられる。一方 v_{i2} は支点が自由に移動できるとすると、その移動量は $\lambda = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{du}{dz} - \frac{u}{\delta} \frac{du}{dz} \right)^2 dz$ で与えられるから上述の条件を考慮すると、 $v_{i2} = \frac{\pi^2}{2 p \phi_0} \times \frac{\sin \phi_0 - \sin \phi_i}{\sin \phi_0}$ で与えられる。

また境界条件を満足する撓み曲線として次式を仮定した。

$$u = \frac{\delta}{3} - \sin \frac{\pi \phi}{2 \phi_0} + \frac{1}{3} \sin \frac{3 \pi \phi}{2 \phi_0} \quad \dots (13)$$

アーチの minimum weight design

上述の塑性崩壊荷重の算定式より、一般にアーチの塑性崩壊荷重は次の形の式で表はされる。即ち荷重状態 $(P, q, f) = F$ で表はすと、

$$(P, q, f) = M_0 / f \times C_1 \quad \text{----- (14)}$$

一方横座屈崩壊荷重より

$$(P, q, f) = \frac{B_2 \times C_2}{f^2} \quad \text{----- (15)}$$

今簡単に矩形断面 $B \times H$ を想定し、 σ_c を降伏点とすると

$$H = \sqrt{\frac{F \cdot P}{2B \sigma_c C_1}}, \quad \text{一方 } B_2 = \frac{4B^3 H}{3} \text{ とする。}$$

$$(14), (15) \text{ を等しいとすると, } H = \frac{2B^2 C_2}{3 \sigma_c C_1 f} \quad \text{横座屈しないためにはこの限界曲線より下に来る必要がある。これと図}$$

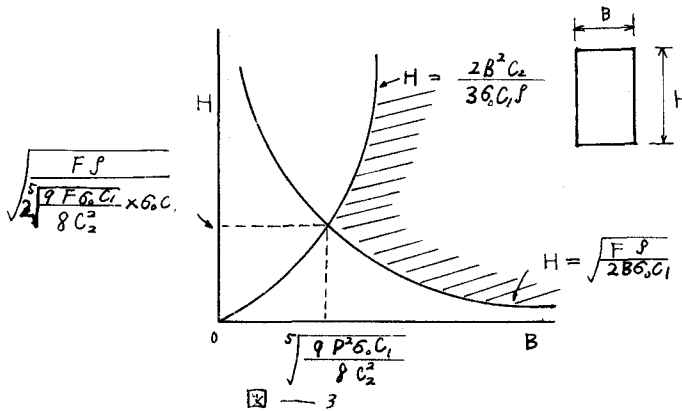


図 — 3

より便利である。

アーチの崩壊に関する実験

以上の理論的考察を確かめる目的と、一アーチの崩壊の条件を考察する目的で図一にまとめられた条件下で8個の試験体によって実験を行った。端条件として両端ヒンジ、固定の2つの場合を比較した。

ヒンジの発生は塑性抵抗線歪計による応力分布、応力塗料および撓み測定しそれより撓み方向の急増の状態を観察して定めた。崩壊は比較的明確な形で示された。同じ支間同じ形状のアーチでも崩壊の形は荷重条件で支配され、特に $1/4$ 集中荷重の場合は塑性ヒンジによる崩壊を示すが、頂点集中荷重となると、荷重点で一個のヒンジを生じた後横座屈を生ずる。分布荷重に至るに従い横座屈が支配的となった。至る実験値と理論値は比較的高く一致した。結果は図一に示す。

形式	載荷状態	断面寸法	崩壊荷重 (b)	崩壊の型
2ヒンジ 円型アーチ		$2B = 5.5$ $2H = 9.3$ $2d = 0.3$ $t = 0.9$	8.7	半塑性 横座屈
"		$2B = 5.5$ $2H = 9.3$ $2d = 0.3$ $t = 0.9$	6.6	塑性 崩壊
"		$2B = 5.0$ $2H = 7.3$ $2d = 0.9$ $t = 0.9$	12.6	弾性 横座屈
"		$2B = 4.0$ $2H = 6.2$ $2d = 0$ $t = 0.6$	3.3	同上
固定 円型アーチ		$2B = 5.5$ $2H = 9.3$ $2d = 0.9$ $t = 0.9$	7.4	半塑性 横座屈
"		$2B = 5.5$ $2H = 9.3$ $2d = 0.9$ $t = 0.9$	9.5	塑性 崩壊
"		$2B = 5.0$ $2H = 7.3$ $2d = 0.9$ $t = 0.9$	14.75	弾性 横座屈
"		$2B = 4.0$ $2H = 6.2$ $2d = 0$ $t = 0.6$	5.7	同上
$L = 300 \text{ cm}$ $2\phi_0 = 90^\circ$ $P = 212.13 \text{ cm}$ $f \div b \div 2$				