Ⅱ—11　斜板橋の解法ならびに応力特性について

正員　北海道開発局土木試験所　岡元北海

斜板橋の解法については従来階差方式によって解かれているが，厳密解は得られていない。筆者は平衡条件式を満足する斜板の一般解より境界条件を満足する条件式を求めて，この条件式をフーリエ級数に展開し条件式に含まれている未知数を求めた。

1．矩形平面板の一般解

厚さが他の寸法に比較して小さい均質等方性板が外力を受け且つそれにより生ずる厚さ方向の変位，すなわち撓みが厚さに比し小さいときは，平板の面に垂直方向の力の釣合条件すなわち中立面の撓みの微分方程式は次のように表わされる。

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} = \frac{p(xy)}{D} \qquad (1)$$

ただし

ζ：　中立面の撓み　　$p(xy)$：　板の面に垂直に作用する分布荷重
D：　$Eh^3/12(1-\nu^2)$ 板の剛度　　E：　板の材料のヤング係数
ν：　板の材料のポアソン比　　h：　板の厚さ

(1)式の特解をζ_0とすれば一般解ζ_1は次のように表わされる：

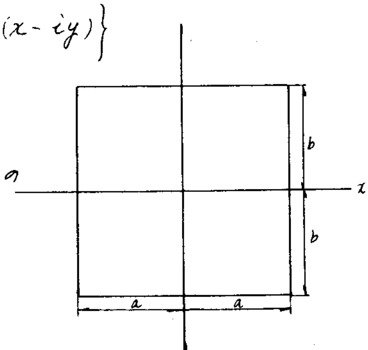
$$\zeta_1 = f_1(x+iy) + g_2(x-iy) + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \left\{ f_2(x+iy) + g_2(x-iy) \right\}$$

これより(1)式の解は

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1$$

図Ⅰおよび図Ⅱより満載等分布荷重を受ける場合(1)式の解は次のようになる。

$$\zeta = \frac{pb^4}{24D}\left(\frac{y^4}{b^4} - 6\frac{y^2}{b^2} + 5\right) + f_1(x+iy) + g_1(x-iy) + x\left[f_2(x+iy) + g_2(x-iy)\right] \qquad (2)'$$

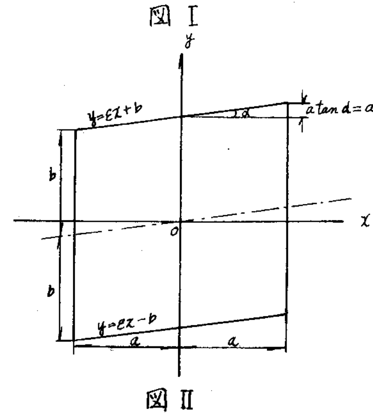


図Ⅰ

2．斜板橋の一般解

前節の結果より図Ⅱのとおりx軸にαの角度を持つ斜板の解は(2)'より次のようになる。

$$\zeta = \frac{p}{24(1+\varepsilon^2)^2}\left[(y-\varepsilon x)^4 - 6b^2(y-\varepsilon x)^2 + 5b^4\right] + f_1(x+iy) + g_1(x-iy) + (x+\varepsilon y)\left\{\frac{1}{1+i\varepsilon} f_2(x+iy) + \frac{1}{1-i\varepsilon} g_2(x-iy)\right\}$$



図Ⅱ

上式において $y=\varepsilon x+b$ および $y=\varepsilon x-b$ なる辺を単純支持とすれば

$\zeta=0$ および $\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial y^2}=0$　　(4)　　(4)の条件を(3)式に代入整理すれば次の式をうる。

$$\zeta=\frac{p}{24D(1+\varepsilon^2)^2}\left\{(y-\varepsilon x)^4-6b^2(y-\varepsilon x)^2+5b^4\right\}+2(x+\varepsilon y)\varepsilon\sum_{n=2,4,6,\cdots}C_n\sin\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\cdot$$
$$\cosh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)+2(x+\varepsilon y)\sum_{n=1,3,5\cdots}D_n\cdot\ \cos\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\sinh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)-\varepsilon\sum_{n=2,4,6,\cdots}A_n\cdot$$
$$\sin\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\sinh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)-\sum_{n=1,3,5,\cdots}B_n\cdot\ \cos\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\cosh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)\qquad(5)$$

式中 $A_n\ B_n\ C_n\ D_n$ の4つの未知数は $x=\pm\alpha$ なる辺が自由辺なる条件より求められる。

3．斜板橋の解法

図IIにおいて $x=\pm\alpha$ なる辺を自由辺とすれば境界条件は次のようになる。

$$\left|\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right|_{x=\pm a}=0\qquad\left|\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}\quad(2-\nu)\frac{\partial^3\zeta}{\partial x\partial y^2}\right|_{x=\pm a}=0\qquad(6)$$

よって(6)式に(5)式を代入すれば次の式をうる。

すなわち

$$\sum_{n=2,4,6,\cdots}g_nC_n+\sum_{n=1,3,5,\cdots}h_nD_n+\sum_{n=2,4,6,\cdots}i_nA_n+\sum_{n=1,3,5,\cdots}j_nB_n=R(y)\qquad(7)$$

および

$$\sum_{n=2,4,6\cdots}g'_nC_n+\sum_{n=1,3,5,\cdots}h'_nD_n+\sum_{n=2,4,6\cdots}i'_nA_n+\sum_{n=1,3,5\cdots}j'_nB_n=R'(y)\qquad(8)$$

上式において

$$g_n=2\frac{n}{\pi}\left\{\varepsilon^2(1-\nu)f_n^{(a)}+\varepsilon(1+\nu\varepsilon^2)\phi_n^{(a)}\right\}+\frac{1}{2}(1-\nu)\varepsilon^2(\alpha'-y')n^2\left\{\varphi_n^{(a)}(1-\varepsilon^2)+2\varepsilon t_n^{(a)}\right\}$$
$$h_n=2\frac{n}{\pi}\left\{(1+\nu\varepsilon^2)f_n^{(a)}-\varepsilon(1-\nu)\phi_n^{(a)}\right\}+\frac{1}{2}(1-\nu)\varepsilon(\alpha'-y')n^2\left\{t_n^{(a)}(1-\varepsilon^2)-2\varepsilon\varphi_n^{(a)}\right\}$$
$$j_n=-\frac{n^2}{4}(1-\nu)\left\{f_n^{(a)}(1-\varepsilon^2)-2\varepsilon\phi_n^{(a)}\right\}\qquad i_n=-\varepsilon\frac{n^2}{4}(1-\nu)\left\{\phi_n^{(a)}(1-\varepsilon^2)+2\varepsilon f_n^{(a)}\right\}$$
$$R(y)=-\frac{(y^{2\prime}-1)}{2\pi^2(1+\varepsilon^2)}(\nu+\varepsilon^2)\qquad(7)'$$

および
$$g'_n=\frac{n^2}{\pi}\left[\left\{\varepsilon(1-\nu)(\varepsilon^2-2\varepsilon)+\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)\right\}t_n^{(a)}+\left\{\varepsilon(1+\varepsilon^2)+\frac{1}{2}(1-\nu)(5\varepsilon^2-1)\varepsilon\right\}\varphi_n^{(a)}\right]$$
$$+\frac{n^3}{4}(\alpha'-y')(1-\nu)\varepsilon^2\left\{f_n^{(a)}(\varepsilon^3-3\varepsilon)+(3\varepsilon^2-1)\phi_n^{(a)}\right\}$$
$$h'_n=\frac{n^2}{\pi}\left[\left\{(1-\nu)(2\varepsilon-\varepsilon^3)-\varepsilon(1+\varepsilon^2)\right\}\varphi_n^{(a)}+\left\{(1+\varepsilon^2)+\frac{1}{2}(1-\nu)(5\varepsilon^2-1)\right\}t_n^{(a)}\right]$$
$$+\frac{n^3}{4}(\alpha'-y')(1-\nu)\varepsilon^2\left\{(3\varepsilon^2-1)f_n^{(a)}-(\varepsilon^3-3\varepsilon)\phi_n^{(a)}\right\}$$
$$j'_n=-(1-\nu)\frac{n^3}{8}\left\{t_n^{(a)}(3\varepsilon^2-1)-\varphi_n^{(a)}(\varepsilon^3-3\varepsilon)\right\}\qquad i'_n=-(1-\nu)\frac{n^3}{8}\varepsilon\left\{t_n^{(a)}(\varepsilon^3-3\varepsilon)+\varphi_n^{(a)}(3\varepsilon^2-1)\right\}$$
$$R'_n=-\frac{\varepsilon}{\pi^3(1+\varepsilon^2)}\left(1+\frac{1-\nu}{1+\varepsilon^2}\right)y'\qquad(8)'$$

(7)′ (8)′において $\varphi_n^{(a)}\ t_n^{(a)}\ f_n^{(a)}\ \phi_n^{(a)}$ はそれぞれ $\varphi_n\ t_n\ f_n\ \phi_n$ の x の代りに α の値を代入した値である。