

## II-2 集中荷重をもつローゼ及バランガー桁の振動について

九州大学工学部 正員 山崎 徳也  
〇正員 本山 茂夫

ローゼ及バランガー桁に集中荷重が載荷された場合、及び断面積の変化、死荷重分布の変化が固有周期に如何程影響するかをエネルギー法によつて調べた。尚上弦曲線はパラボラとし、計算の手法は前研究に準じ之を拡張一般化したものである。

### 1. 周期

上下弦材の振動撓みを、スパン中央点を原点にとり次式で表わす。

$$\eta = \eta_0 \cos \omega t$$

$$\eta_0 = \sum a_n \cos \frac{(2n-1)\pi}{2L} x + \sum b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

但し、 $\eta_0$ は橋の両端の境界条件を満足し、 $\omega$ は振動率。

Potential Energy  $\bar{V}$  は、上下弦材の水平推力  $N$  によるものを  $\bar{V}_N$ 、モーメントによるものを  $\bar{V}_M$  とすれば、 $\bar{V} = \bar{V}_N + \bar{V}_M$

$$\bar{V}_N = \int_{-L}^L \frac{(N \sec \alpha)^2}{2EA_u(1+p|\frac{x}{L}|)} dx + \int_{-L}^L \frac{N^2}{2EA_u(1+q|\frac{x}{L}|)} dx$$

$$= \frac{L}{E} \left( \frac{C}{A_u} + \frac{B}{A_u} \right) \cdot K^2 \left[ \sum a_n \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \right]^2$$

但し  $K = \frac{4 \cdot f \cdot E \cdot A_u \cdot A_l}{L^2 \cdot (A \cdot A_l + B \cdot A_u) \cdot \pi}$

$$A = 1 + \frac{1}{6} K^2 - \frac{1}{40} K^4 + \frac{1}{112} K^6 - \dots \quad B = \frac{1}{8} \log_e |1+q|$$

$$+ p \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} K^2 + \frac{1}{48} K^4 - \frac{1}{128} K^6 + \dots \right) \quad C = 1 - \frac{1}{2} p + \frac{1}{3} p^2 - \frac{1}{4} p^3 + \dots$$

$$+ p \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{10} K^2 - \frac{1}{56} K^4 + \frac{1}{144} K^6 - \dots \right) \quad + K^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} p + \frac{1}{5} p^2 - \frac{1}{6} p^3 + \dots \right)$$

$$K = \frac{2f}{L}, \quad p = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{min}}, \quad \text{上下弦等断面で } p=0, \quad q=0 \quad (r=0, s=0)$$

$$\bar{V}_M = \int_{-L}^L \frac{M_u^2}{2EI_u(1+r|\frac{x}{L}|)} dx + \int_{-L}^L \frac{M_l^2}{2EI_l(1+s|\frac{x}{L}|)} dx$$

$$= \frac{\pi^4 E}{16L^3} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{4} I'_0 \right) \sum a_n^2 (2n-1)^4 - \frac{I'_0}{\pi^2} \sum a_n^2 (2n-1)^2 + \frac{I'_0}{2\pi^2} \sum_i \sum_j a_i a_j (2i-1)^2 (2j-1)^2 \left\{ \frac{(-1)^{i+j}-1}{(i+j-1)^2} + \frac{(-1)^{i-j}-1}{(i-j)^2} \right\} \right]$$

$$+ \left( 8I_0 + 4I'_0 \right) \sum b_n^2 n^4 + \frac{8I'_0}{\pi^2} \sum_i \sum_j b_i b_j i^2 j^2 \left\{ \frac{(-1)^{i-j}-1}{(i-j)^2} - \frac{(-1)^{i+j}-1}{(i+j)^2} \right\}$$

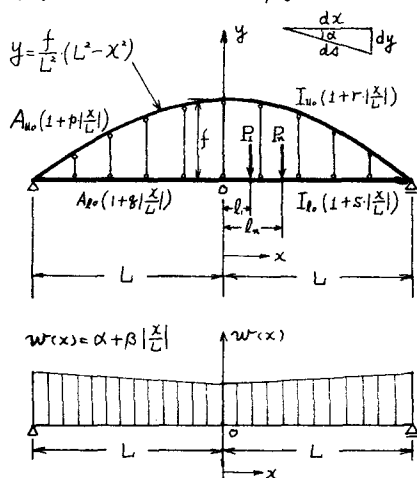
但し ローゼ"桁 ( $I_0 = I_u + I_l, I'_0 = r \cdot I_u + s \cdot I_l$ )

バランガー桁 ( $I_0 = I_l, I'_0 = s \cdot I_l$ )

$$\begin{cases} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad i \neq j$$

Kinetic Energy  $T$  は、死荷重によるものを  $T_w$ 、集中荷重によるものを  $T_p$  とすれば、

$$T = T_w + T_p$$



$I_u, I_l$ : 上下弦材の基準断面2次モーメント  
 $A_u, A_l$ : 上下弦材の基準断面積

$$T_w = \frac{1}{2} \frac{w^2}{g} \int_L^L w(x) \cdot \eta_0^2 dx \quad (g: \text{重力加速度}, w: \text{橋の単位長当りの重量})$$

$$= \frac{L}{2g} \cdot w^2 \left\{ \alpha \cdot \sum a_n^2 + \beta \left\{ \frac{1}{2} - \frac{2}{(2n-1)^2 \pi^2} \right\} a_n^2 + \frac{\beta}{\pi^2} \sum_i \sum_j a_i a_j \left\{ \frac{(-1)^{i+j}-1}{(i+j-1)^2} + \frac{(-1)^{i-j}-1}{(i-j)^2} \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha \cdot \sum b_n^2 + \frac{1}{2} \beta \sum b_n^2 + \frac{\beta}{\pi^2} \sum_i \sum_j b_i b_j \left\{ \frac{(-1)^{i-j}-1}{(i-j)^2} - \frac{(-1)^{i+j}-1}{(i+j)^2} \right\} \right\} \right\} \quad \begin{matrix} i+j \\ i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n \end{matrix}$$

$$T_p = \sum \frac{P_n}{2g} \cdot w^2 \left\{ a_n \cos \frac{(2n-1)\pi}{2L} l_n + b_n \sin \frac{n\pi}{L} l_n \right\}^2 \quad l_n: \text{原点から } P_n \text{ までの距離}$$

$F = V - T$  とし、 $\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial b_1}, \frac{\partial F}{\partial b_2}, \dots = 0$  より  $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  に関する線型同次連立方程式を作

れば、

$$\begin{cases} 2(A - \lambda_1 \omega^2) a_1 + (L - \beta \omega^2) a_2 + \dots - \mu_1 \omega^2 b_1 - \mu_2 \omega^2 b_2 - \dots = 0 \\ (L - \beta \omega^2) a_1 + 2(B - \lambda_2 \omega^2) a_2 + \dots - \mu_3 \omega^2 b_1 - \mu_4 \omega^2 b_2 - \dots = 0 \\ \vdots \\ -\mu_1 \omega^2 a_1 - \mu_3 \omega^2 a_2 - \dots + 2(D - \lambda_4 \omega^2) b_1 + (X - \beta \omega^2) b_2 + \dots = 0 \\ -\mu_2 \omega^2 a_1 - \mu_4 \omega^2 a_2 - \dots + (X - \beta \omega^2) b_1 + 2(F - \lambda_5 \omega^2) b_2 + \dots = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  が 0 でない解を有する条件から係数の行列式  $\Delta = 0$  より所要次数までの振動率を得る。無載荷状態では  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = 0$  であるから  $\Delta = \Delta_a \cdot \Delta_b$

よって  $\Delta_a = \begin{vmatrix} 2(A - \lambda_1 \omega^2) & (L - \beta \omega^2) & \dots \\ (L - \beta \omega^2) & 2(B - \lambda_2 \omega^2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \quad \Delta_b = \begin{vmatrix} 2(D - \lambda_4 \omega^2) & (X - \beta \omega^2) & \dots \\ (X - \beta \omega^2) & 2(F - \lambda_5 \omega^2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \quad \Delta_a = 0, \Delta_b = 0$  より対

称・逆対称振動の振動率を得る。載荷の場合橋の中央点は逆対称振動の node であるから中央点載荷集中荷重の影響をうけるのは対称振動である。これは  $T_p$  の式で  $b_n$  を含む項がすべて 0 となるから  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = 0$  となり且つ  $\Delta_b$  に集中荷重の factor が入らない事からも証明される。任意点載荷では対称、逆対称とはならない。

## 2. 振動型

振動型の計算は次式により行う。固有周期  $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$  に対し、

$$\eta_0^{(i)} = \sum a_n^{(i)} \cos \frac{(2n-1)\pi}{2L} x + \sum b_n^{(i)} \sin \frac{n\pi}{L} x \quad \Delta = 0 \text{ より得る 1 根 } \omega_i \text{ をパラメーターの連立方程式}$$

に代入すれば  $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \dots$  の比が 1 通り求められ上式に代入して振動型が得られる。

## 3. 結 べ

i) 断面積・死荷重分布の固有周期に及ぼす影響は本法が近似解法であることを考えると、右表に見る如く僅少である。千歳橋でも  $\mu = 8.1\%$  で同程度と云える。

ii) 集中荷重の影響

単一荷重について調べた。中央点載荷では対称振動の周期は当然大となり、逆対称振動のそれは変らない。1/4 点載荷では周期の大きい順に 1 次, 2 次, 3 次, ... とすれば 1 次が逆対称に近く, 2 次, 3 次が対称に近い振動となる。故に無載荷の逆対称 1 次, 対称 1 次に対する 1 次, 2 次振動周期の比較を行い結果を次表に示す。

即ち周期に及ぼす影響は、変断面・変荷重では僅少であるが、集中荷重では吟味を要することが云える。

|   |           | $T_i$ (対称) | (%)   |
|---|-----------|------------|-------|
| 1 | 等分布荷重・等断面 | 0.435 sec  |       |
| 2 | 等分布荷重・変断面 | 0.434      | -0.2% |
| 3 | 変荷重・等断面   | 0.431      | -1.0% |

銀瀬橋 (ロセ橋)  $\mu = 8.4\% \quad 2L = 72m$

|     | 中央点載荷               |                      | 1/4 点載荷             |                     | 無載荷                    |
|-----|---------------------|----------------------|---------------------|---------------------|------------------------|
|     | $P=4t$              | $P=10t$              | $P=4t$              | $P=10t$             |                        |
| 1 次 | 0.862 sec           | 0.862 sec            | 0.891 sec<br>(3.4%) | 0.928 sec<br>(7.7%) | 0.862 sec<br>(逆対称 1 次) |
| 2 次 | 0.464 sec<br>(6.5%) | 0.503 sec<br>(15.6%) | 0.435 sec<br>(0.0%) | 0.457 sec<br>(5.1%) | 0.435 sec<br>(対称 1 次)  |

( ) 内は増加率を示す。

橋と集中荷重の重量比率  $\begin{cases} P=4t & 1.7\% \\ P=10t & 4.3\% \end{cases}$

本研究には松本陽太郎君の卒業論文として、協力を得たことを附記する。