Ⅱ—1　完全固定梁の解析及び実験

信州大学工学部　正員　吉田俊弥
○建設省北陸地建富山工事々務所
準員　花市穎吾

(1)緒論

普通単純梁及び固定梁として取扱われるものは，便宜上一端の水平移動可能，即ち伸縮する事のない中立軸の存在を仮定している．而るに両端の水平変位が全然許されず，又はその一部が拘束される如き場合は少くない。この場合当然軸張力が誘発される。

従って，こゝでは完全固定梁とは上記の如きものを指し，厳密解には，この軸張力Xの考慮が必要になり，その影響は見逃し得ない場合もある．本研究では，荷重Pにより誘発される軸張力Xを求めたものである。更にたわみの理論値と実測値との比較をしてみた。

完全固定梁の解法については鷹部屋福平博士が，中央点載荷の場合及び等分布荷重載荷の場合について，理論式を示されているが，本研究では任意点載荷の場合について理論的実験的研究をなした。

(2)固定梁

図-1の如く一端Aは固定されて不動であるが，他端Bは不動ではなく，単にさし込んであって荷重がかかると，水平方向に抜け出す状態である。この梁を通常両端固定梁と呼び両端には支点モーメントM_a，M_b及び垂直反力R_a，R_bが作用する。

図-1の場合のモーメント及びたわみを求めると

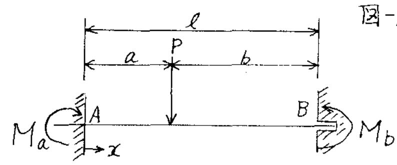

図-1

$$M_a = -\frac{Pab^2}{l^2} \qquad M_b = -\frac{Pa^2b}{l^2}$$

任意点の曲げモーメントMは

$$M = \frac{Pb^2}{l^3}\left\{x(l+2a) - la\right\} \quad (0<x<a), \qquad M = \frac{Pa^2}{l^3}\left\{-x(l+2b) + l(l+b)\right\} \quad (a<x<l)$$

たわみyは

$$y = \frac{Pb^2}{6EI}\left\{3a\frac{x^2}{l^2} - (l+2a)\frac{x^3}{l^3}\right\} \quad (0<x<a), \qquad y = \frac{Pa^2}{6EI}\left\{(l+2b)\frac{x^3}{l^3} - 3(l+b)\frac{x^2}{l^2} + 3x - a\right\} \quad (a<x<l)$$

(3)単一荷重を任意点に荷せられた完全固定梁

中央点に単一荷重がある場合については，既に鷹部屋博士により詳細に解かれているから，ここでは任意点に単一荷重がある場合についての解を示す。

両端埋込みであるから，負荷後，梁には変曲点を生ずるが，その位置は実測値よりも分る如く，軸張力の有無大小により余り変る事なく，荷重位置によって大体一定と考えられる。従って，完全固定梁の解法は鉸端梁の解法に帰着する。

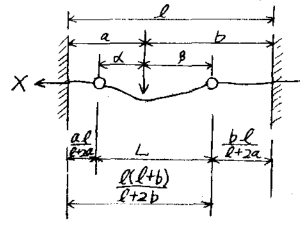

図-4

今水平変位可能な固定梁の変曲点の位置は，$M=0$より

$$0<x<a \text{ に於て } x = \frac{al}{l+2a}, \qquad a<x<l \text{ に於て } x = \frac{l(l+b)}{l+2b}$$

従って図-4の如く鉸端梁Lを解けば良い。

任意点xの曲げモーメントは

$$0<x<\alpha \qquad M=\frac{\beta}{L}Px-Xy, \qquad \alpha<x<L \qquad M=\frac{\alpha}{L}P(L-x)-Xy$$

今未知量Xによる以外の曲げモーメント，即ち単純梁としての曲げモーメントをM_0とおくと　$M=M_0-Xy$

ここで，M_0を正弦フーリエ級数で表すと

$$M_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{L}x, \qquad A_n=\frac{2}{L}\int_0^L M_0\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

M_0式よりA_nを求めると

$$A_n=\frac{2P}{L}\left\{\int_0^{\alpha}\beta x\sin\frac{n\pi x}{L}dx+\int_{\alpha}^{L}\alpha(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right\}$$

$$=\frac{2P}{L}\left\{-\beta\left[x\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{\alpha}+\beta\int_0^{\alpha}\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}dx-\alpha\left[(L-x)\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_{\alpha}^{L}-\alpha\int_{\alpha}^{L}\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right\}$$

$$=\frac{2P}{L}\left\{-\alpha\beta\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi\alpha}{L}+\frac{\beta L}{n\pi}\left[\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{\alpha}+\alpha(L-\alpha)\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi\alpha}{L}-\frac{\alpha L}{n\pi}\left[\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{\alpha}^{L}\right\}$$

$$=\frac{2P}{L}\left\{-\frac{\alpha\beta L}{n\pi}\cos\frac{n\pi\alpha}{L}+\frac{\beta L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi\alpha}{L}+\frac{\alpha(L-\alpha)L}{n\pi}\cos\frac{n\pi\alpha}{L}+\frac{\alpha L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi\alpha}{L}\right\}$$

$$=\frac{2P}{L^2}\frac{L^3}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi\alpha}{L}=\frac{2PL}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi\alpha}{L}$$

故に弾性曲線の微分方程式は

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}-Xy+\frac{2PL}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi\alpha}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}=0$$

求むる解は

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad \beta_n=\frac{2PL}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi\alpha}{L}\frac{1}{\frac{n^2\pi^2EI}{L^2}+X}$$

であるから第一項のみをとれば

$$y=\frac{2PL}{\pi^2}\left\{\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{L}\sin\frac{\pi}{L}x}{\frac{\pi^2EI}{L^2}+X}\right\}$$

ここで$\frac{\pi^2EI}{L^2}+X=\frac{\pi^2E}{L^2}I'$　とおきXの影響を加味した仮想断面二次モーメントI'を用いる，即ち，　$I'=I+\frac{L^2}{\pi^2E}X$　とおけば

$$y=\frac{2PL}{\pi^2}\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{L}\sin\frac{\pi x}{L}}{\frac{\pi^2EI}{L^2}+X}=\frac{2PL^3}{\pi^4EI'}\sin\frac{\pi\alpha}{L}\sin\frac{\pi x}{L}$$

又単純梁の可動端の水平移動量δ_0は負荷後，梁の伸長量δに近似的に等しい事を用いてXを求めると

$$L+\Delta L=\int_0^L\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \qquad \therefore\ \Delta L=\frac{1}{2}\int_0^L\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx$$

$$\Delta L=\frac{P^2\alpha^2\beta^2}{90E^2I'^2L^2}(\alpha^3+5\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2+\beta^3)$$

従って鉸端固定梁の水平軸力，Xは上式に於て，$I\to I'$とすれば良いから

$$X=\frac{EA}{L}\Delta L=\frac{EAP^2\alpha^2\beta^2}{90E^2L^3(I+\frac{L^2}{\pi^2E}X)^2}(\alpha^3+5\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2+\beta^3)=\frac{P^2\alpha^2\beta^2A}{90EL^3(I+\frac{L^2}{\pi^2E}X)^2}(\alpha^3+5\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2+\beta^3)$$

Xを試算的に求めるためにmを求める式を誘導すると

$$\frac{4EI}{L^2}m^2=\frac{P^2\alpha^2\beta^2A}{90EL^3I^2}\frac{\alpha^3+5\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2+\beta^3}{(1+\frac{L^2}{\pi^2}\frac{4}{L^2}m^2)^2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{360m^2(1+\frac{4}{\pi^2}m^2)^2}=\frac{E^2I^3L}{P^2\alpha^2\beta^2A(\alpha^3+5\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2+\beta^3}$$

なお実験値も，完全固定梁については理論値とかなり良く一致した，此の事は講演会に於て述べる予定である。