

IV-25 平板の単純支持を含む固定辺における不連続的応力の 曲げ応力について

室蘭工業大学 正員 能町純雄

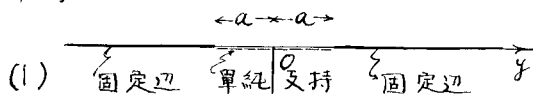
平板の固定辺の一部分が単純支持を含むような板の曲げについては、倉田宗章氏が矩形板について解いて種々の数値計算の結果を与えておられる。此所では固定辺上の不連続点の近傍に限って応力状態を解明する。従って板は境界を一つだけ有する半無限板とし応力は無限遠で一様な曲げのみを受けている場合を取扱い、解法は Dual の積分方程式の理論に依って行う。図の如き状態である。

1. 基本微分方程式

板のタワミを w とすれば、荷重のない場合には、剛

度 N の板の曲げは

$$N \Delta^2 w = 0,$$



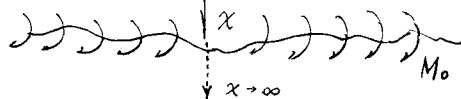
で表わされる。

2. 特殊解

$x=0$ でタワミと slope が消失し、到る所で

x 方向曲げモーメント M_x が M_0 なる曲げは明らかに

$$w_1 = -\frac{M_0}{2N} x^2 \quad (2)$$



3. 補助解

方程式(1)を満足し次の境界条件

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ で } w &= 0, \\ x=0 \text{ で } -N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= M_0, \quad |x| < a \\ \frac{dw}{dx} &= 0, \quad |x| > a \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(4)

を満足する板のタワミは、次のように求められる。

今 W を w の Fourier transform とすれば

$$w = \int_0^\infty W \cos \lambda y d\lambda, \quad \text{故に} \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^2 W = 0, \quad (5)$$

$$\therefore W = (A + Bx) e^{-\lambda x} \quad (6)$$

$$\text{境界条件 (3) から } A = 0, \quad \therefore W = Bx e^{-\lambda x} \quad (7)$$

$$\text{又} \quad M_x = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -N \int_0^\infty \lambda^2 B (x\lambda(1-\nu) - 2) e^{-\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \quad (8)$$

従つて上式の Fourier Transform $\overline{M}_x$ は、

$$\overline{M}_x = -NB\lambda^2 e^{-\lambda x} \{ (1-\nu) dx - 2 \} , \quad (9)$$

故に境界条件 (4) は

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} B\lambda^2 \cos \lambda y d\lambda &= \frac{M_0}{2N} , & |y| < a \\ \int_0^{\infty} B\lambda \cos \lambda y d\lambda &= 0 , & |y| > a \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

今 $y/a = \eta$, $\lambda a = \xi$ とおけば $J_{\pm \frac{3}{2}}(\xi\eta) = (\frac{2}{\pi\xi\eta})^{\pm \frac{1}{2}} \cos(\xi\eta)$ の関係があるから、(10) 式は

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} B\xi^{\frac{5}{2}} J_{\pm \frac{3}{2}}(\xi\eta) d\xi &= (\frac{2}{\pi\eta})^{\pm \frac{1}{2}} \frac{a^3 M_0}{2N} , & |\eta| < 1 \\ \int_0^{\infty} B\xi^{\frac{3}{2}} J_{\pm \frac{3}{2}}(\xi\eta) d\xi &= 0 , & |\eta| > 1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

これは Dual の Integral Equation であるから B は

$$B\xi^{\frac{5}{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(1+\frac{1}{2})} J_1(\xi) \int_0^1 (1-\lambda^2)^{\pm \frac{1}{2}} d\lambda \cdot \frac{a^3 M_0}{2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} N} = \frac{M_0 a^3}{2N} \xi^{\pm \frac{1}{2}} J_1(\xi) \quad (12)$$

この補助解と特殊解とを組合せれば $|y| < a$ で単純支持 $|y| > a$ で固定の辺を有する半無限板が一般な曲げを受ける時の不連続変位傍の応力状態が閉じた函数形で得られる。

4, 補助解における $x=0$ に沿う曲げモーメント M_x は、

$$M_x = 2N \int_0^{\infty} B\lambda^2 \omega \lambda y d\lambda = \frac{2N}{a^3} \int_0^{\infty} B\xi^{\frac{5}{2}} \cos \xi y d\xi , \quad (13)$$

$$\therefore M_x = \frac{2N}{a^3} \int_0^{\infty} \frac{M_0}{2N} J_1(\xi) \cos \xi y d\xi ,$$

上式は、Weber, Schafheitlin の不連続積分によって、次のようになる。

$$M_x = M_0 , \quad |y/a| < 1 ; \quad M_x = - \frac{M_0}{\sqrt{(\frac{y}{a})^2 - 1} \{ (\frac{y}{a}) + \sqrt{(\frac{y}{a})^2 - 1} \}} , \quad |y/a| > 1 , \quad (14)$$

5, 題意の板の境界に沿う M_x ,

特殊解から補助解を差し引けば $|y| < a$, で単純支持, $|y| > a$ で固定の半無限板が一般な曲げによる境の M_x は次のようになる。

$$M_x = 0 , \quad |y| < a ; \quad M_x = M_0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(\frac{y}{a})^2 - 1} \{ (\frac{y}{a}) + \sqrt{(\frac{y}{a})^2 - 1} \}} \right) , \quad |y| > a ;$$

$$\text{or } M_x = M_0 \cdot (\frac{y}{a}) \sqrt{(\frac{y}{a})^2 - 1} , \quad |y| > a ; \quad (15)$$