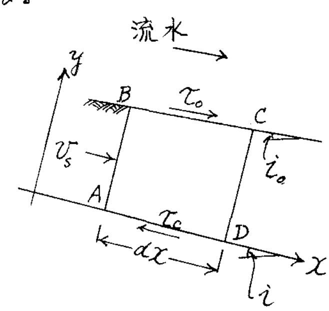
Ⅲ—61　河川の安定勾配について

日本大学　正員　木村喜代治

掃流砂のある河川の動的な安定勾配を求める方法は2・3発表されている。また掃流砂の理論において，河床を1種の流動体として取扱つた研究もある。本報もこれ等と同様な考へから，掃流砂の流れの層（以下掃流層と称す）を水と土砂との混合物の塑性体として取扱い，流砂の運動方程式を導き，流水の基本方程式とから，広長方形水路の不等流の水深や動的な安定勾配などの基本方程式を求めたものである。

流砂の運動方程式は，右図の如く dx 間の微少部分に運動量の法則を適用すると



$$\int_0^\delta \rho_s b \frac{\partial v_s}{\partial t} dy \cdot dx + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho_s b v_s^2 dy \cdot dx = F_{p.1} - F_{p.2} + F_c + F_w + F_g$$

$$+ b\tau_0 dx - b\tau_c dx$$

（ρ_s：混合物の密度，b：水路幅，δ：掃流層の厚さ，v_s：混合物の速度，$F_{p.1}-F_{p.2}$：上下流面の圧力差，F_c：上面よりの水圧分力，F_w 側面よりの分力，F_g：重力の分力，τ_0：流水の底面せん断力，τ_c：非流動部よりのせん断力）。ここで p を河床面の水圧とすると

$$F_{p.1}-F_{p.2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{b\delta\left(p+\frac{\rho_s g}{2}\delta\right)\right\}dx,\quad F_w = \delta\left(p+\frac{\rho_s g}{2}\delta\right)\frac{db}{dx}dx,\quad F_c = pb\frac{\partial \delta}{\partial x}dx,\quad F_g = \rho_s g b\delta i\, dx$$

これ等を上式に代入し，ρ_s を一定，且つ定常流とし，

$$i_0 = i - \frac{d\delta}{dx},\qquad \frac{d}{dx}\int_0^\delta b v_s^2 dy = \frac{\alpha_s b\delta}{2}\frac{\partial V_s^2}{\partial x}$$　（V_s：混合物の平均流速）

と置いて整理すると

$$-i_0 + \frac{\rho}{\rho_s}\frac{dh}{dx} + \frac{\alpha_s}{2g}\frac{dV_s^2}{dx} - \frac{\tau_0}{\rho_s g\delta} + \frac{\tau_c}{\rho_s g\delta} = 0$$　（h：流水の水深）

この式に流砂の連続式 $dQ_s/dx = 0$，又は $Q_s = Const$ を用いて（Q_s：掃流砂量）

$$-i_0 + \frac{\rho}{\rho_s}\frac{dh}{dx} - \frac{\delta_c^3}{\delta^3}\frac{d\delta}{dx} - \frac{\delta_c^3}{\delta^2 b}\frac{db}{dx} - \frac{\tau_0}{\rho_s g\delta} + \frac{\tau_c}{\rho_s g\delta} = 0 \qquad (1)$$

ここで $\delta_c^3 = \dfrac{\alpha_s Q_s^2}{g b^2}$ である。一方流水の基本方程式は

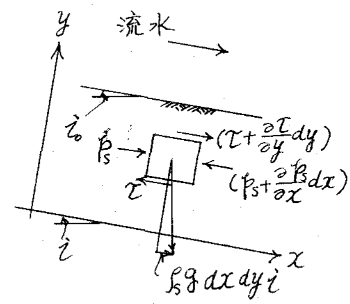
$$-i_0 + \frac{dh}{dx} - \frac{h_c^3}{h^3}\frac{dh}{dx} - \frac{h_c^3}{h^2 b}\frac{db}{dx} + \frac{\tau_0}{\rho g h} = 0 \qquad (2)$$

掃流砂量を求めるため，次図の如く微少部分の釣合いより，掃流層内のせん断力は

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \rho g\frac{dh}{dx} - \rho_s g i + \frac{\rho_s}{2}\frac{\partial v_s^2}{\partial x}$$

これを，$y=0$ から $y=y$ まで積分すると

$$\int_{\tau}^{\tau_c} d\tau = -\rho_s g i_0 y + \rho g \frac{dh}{dx} y + \frac{\rho_s}{2}\int_0^y \frac{\partial v_s^2}{\partial x} dy$$



上式の最終項を近似的に

$$\frac{\rho_s}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y v_s^2 dy \fallingdotseq \frac{\rho_s}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta v_s^2 dy \cdot \frac{y}{\delta} = \frac{\rho_s}{2}\frac{d}{dx}(\alpha_s \cdot V_s^2)\cdot y$$

と置くと

$$\tau-\tau_c = \rho g \frac{dh}{dx} y + \rho_s g\left(-i_0 + \frac{\alpha_s}{2g}\frac{dV_s^2}{dx}\right) y = -\rho_s g I_{fs} y \qquad (3)$$

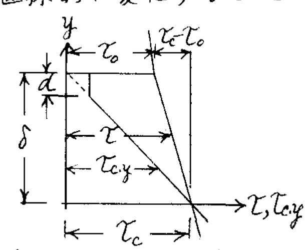
となる。次に各点の土砂の摩擦力 $\tau_{c \cdot y}$ は Coulomb の式によって表わされるとし

$$\tau_{c\cdot y} = \frac{1}{K}(1-\lambda_c)(\rho'-\rho) g(\delta-y)\tan\varphi = (\rho_s-\rho) g(\delta-y)\tan\varphi \qquad (4)$$

（λ_c：A. Casagrande の限界間げき比に対応する限界空げき率，K：空げき率の補正係数，ρ'：土砂の密度，φ：土砂の流動中の摩擦角）。ただし λ_c，K，φ などは掃流層内で平均的な値を取る。限界掃流力附近についての K の値は，岩垣博士の研究と対比して計算すると大略 3.35 ～ 14.1 位となる。掃流層内の速度分布を求めるため，松梨氏の研究と同様に

$$\tau-\tau_{c\cdot y} = \mu_s \frac{dv_s}{dy} \qquad (5)$$

（μ_s：混合物の粘性係数）(3), (4) 式によって τ，$\tau_{c\cdot y}$ は水深と共に直線的に変化することがわかる。よって (5) 式は $\delta-d$ の部分に対し　$\tau-\tau_{c\cdot y} = \tau_0 \cdot \frac{y}{\delta} = \mu_s \frac{dv_s}{dy}$



になる。これを積分し $y=0$ で $v_s=0$ とすると　$v_s = \frac{\tau_0}{2\mu_s}\frac{y^2}{\delta}$，

また河床面から d の部分が $y=\delta-d$ の流速で一様に流動していると仮定し

$$Q_s = \frac{(1-\lambda_c)b}{K}\int_0^{\delta-d} v_s dy + \frac{(1-\lambda_c)b}{K}[v_s]_{y=\delta-d}\cdot d = \frac{(1-\lambda_c)b\tau_0}{6\mu_s K}(\delta-d)^2(\delta+2d) \qquad (6)$$

もし $d \ll \delta$ であるなら　$Q_s = \frac{(1-\lambda_c)b\delta^2\tau_0}{6\mu_s K}$ (7)

平均流速に Chézy の式を用い上式に代入すると　$\delta = \left\{\frac{6\mu_s K C^2 Q_s b h^2}{(1-\lambda_c)\rho g Q^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = a b^{\frac{1}{2}} h$ (8)

等流で安定の確立している部分では (1) 式より　$\delta^* = \frac{\rho/\rho_s}{1/i_0^*(1-\rho/\rho_s)\tan\varphi - 1} h^* = A h^*$ (9)

(1), (2) 式から i_0 を消去し，微少部分を省略すると

$$\frac{dh}{dx} = \frac{(1-\frac{\rho}{\rho_s})\tan\varphi - \frac{Q^2}{C^2 b^2 h^3}\left(1+\frac{\rho}{\rho_s}\frac{b^{*\frac{1}{2}}}{A b^{\frac{1}{2}}}\right) + \frac{h_c^3}{h^2 b}\frac{db}{dx}}{1-\frac{\rho}{\rho_s}-\frac{h_c^3}{h^3}} \qquad (b^*：\text{等流部の幅}) \quad (10)$$

同様に τ_0 を消去すると

$$i_0 = \frac{\left(1+A\frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{*\frac{1}{2}}}-\frac{h_c^3}{h^3}\right)\frac{dh}{dx} - \frac{h_c^3}{h^2 b}\frac{db}{dx} + A\frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{*\frac{1}{2}}}\left(\frac{\rho_s}{\rho}-1\right)\tan\varphi}{1+\frac{\rho_s}{\rho}\frac{A b^{\frac{1}{2}}}{b^{*\frac{1}{2}}}} \qquad (11)$$