Ⅲ—45　平均値法による管水路内の流量算定式とその精度

中央大学工学部　正員　春日屋　伸昌

ピトー管または流速計を用いて管水路内の流量を測定する従来の方法は，任意の半径に沿ってのn個の観測点がn等分された断面積の面積中心となるようにしたもので，平均流速Vは観測点x_iでの流速をv_iとすれば$V=\sum_{i=1}^{n} v_i/n$　で表わされる。この式が成り立つためには，断面内の流速分布曲面が任意の半径に沿っての流速分布曲線を管軸のまわりに回転させてできる回転面で十分近似的に表わせるという仮定が必要である。もしこの仮定が成り立てば，平均値法を用いて従来よりも合理的で精度の高い算定式を導くことができる。

断面の中心に原点，任意の半径（長さをr）に沿ってx軸をとり，x点での流速をvとすれば，平均流速Vは，

$$V \doteqdot \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi x v\, dx = \frac{2}{r^2}\int_0^r x v\, dx \tag{a}$$

ここで，つぎの変数変換，

$$x^2 = r^2(1+t)/2 \tag{b}$$

をおこない，被積分函数を$v \equiv g(t)$ とおけば，(a)式は，

$$V = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} v\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\, dt \tag{c}$$

さて，(c)式が区間〔−1，1〕内に適当にとったn個の観測点t_iにおける流速v_iとn個の定係数A_iとの積$A_i v_i$の総和，

$$V = A_1v_1 + A_2v_2 + \cdots + A_nv_n = \sum_{i=1}^{n} A_i v_i \tag{d}$$

に近似的に等しくなるようにt_i，A_i（$i=1，2，\cdots，n$）の値を定める。それには$g(t)$をMaclaurin の級数に展開して，

$$v = g(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \tag{e}$$

とおき，これを（c)式に入れて項別に積分すれば，

$$V = a_0 + (a_2/3) + (a_4/5) + \cdots \tag{f}$$

また，観測点t_iにおける流速v_iは（e)式より，

$$v_i = g(t_i) = a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 + \cdots \tag{g}$$

(g)式を(d)式に入れれば，

$$V = \sum_{i=1}^{n} A_i(a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 + \cdots) = a_0\sum_{i=1}^{n} A_i + a_1\sum_{i=1}^{n} A_i t_i + a_2\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^2 + \cdots \tag{h}$$

(f)式と(h)式とのaの係数を等しいとおけば，つぎの連立方程式がえられる。

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = 1,\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^2 = 1/3,\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^3 = 0,\ \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^4 = 1/5,\ \cdots\cdots \tag{i}$$

(i)式の初めから$2n$個の方程式を解いて$2n$個の未知数t_i，A_i（$i=1，2，\cdots，n$)の値を定めれば（Gauss　の平均値法)，t_iに対応する実際の観測点の位置x_iは(b)式より求められる。$n=2$～5に対する算定式を例挙すると，

$$n=2;\quad V = (v_{0.460} + v_{0.888})/2 \tag{j}$$

$$n=3;\quad V=\{5(v_{0.336}+v_{0.942})+8v_{0.707}\}/18 \qquad (k)$$
$$n=4;\quad V=0.174(v_{0.263}+v_{0.965})+0.326(v_{0.574}+v_{0.819}) \qquad (l)$$
$$n=5;\quad V=0.118(v_{0.217}+v_{0.976})+0.239(v_{0.480}+v_{0.877})+0.284v_{0.707} \qquad (m)$$

ここに，$v_{0.460}$は半径に沿って中心より$0.460r$の点での流速を意味し，中心に関して対称な2点での平均値とする。これらを平均値公式とよぶ。(j)～(m)式は，半径に沿っての流速分布が変数tに関してそれぞれ高々3次，5次，7次，9次の多項式で表わされるときに誤差を伴なわない。このような次数をその公式の近似度という。

平均値公式は従来の式にくらべて合理的であるが，観測点での測定の精度を分散σ^2で表わすと，誤差伝播の法則によって，Vの分散はそれぞれ，

$$n=2\quad 0.500\sigma^2,\ n=3\quad 0.352\sigma^2,\ n=4\quad 0.273\sigma^2,\ n=5\quad 0.223\sigma^2 \qquad (n)$$

となって，従来のn点法でのVの分散$1/n$より1割くらい大きい。そこで，Vの分散が最小となるように予め$A_1=A_2=\cdots=A_n=1/n$と定めて，観測点の位置だけを合理的に定めれば（Tschebyscheffの平均値法），

$$n=2;\quad V=(v_{0.460}+v_{0.888})/2\quad [\text{(j)式と全く同じ}] \qquad (o)$$
$$n=3;\quad V=(v_{0.383}+v_{0.707}+v_{0.924})/3 \qquad (p)$$
$$n=4;\quad V=(v_{0.320}+v_{0.637}+v_{0.771}+v_{0.947})/4 \qquad (q)$$
$$n=5;\quad V=(v_{0.289}+v_{0.559}+v_{0.707}+v_{0.829}+v_{0.957})/5 \qquad (r)$$

(o)～(r)式の近似度は3次，3次，5次，5次で，これらを等重公式とよぶ。

つぎに，既往の観測値を用いて結果を修正するために，観測点の位置が従来のと同じで定係数だけを合理的に定めれば（Maclaurinの平均値法），

$$n=2;\quad V=(v_{0.500}+v_{0.866})/2\quad [\text{従来の式と全く同じ}] \qquad (s)$$
$$n=3;\quad V=\{3(v_{0.408}+v_{0.913})+2v_{0.707}\}/8 \qquad (t)$$
$$n=4;\quad V=\{13(v_{0.354}+v_{0.935})+11(v_{0.612}+v_{0.791})\}/48 \qquad (u)$$
$$n=5;\quad V=\{275(v_{0.316}+v_{0.949})+100(v_{0.548}+v_{0.837})+402v_{0.707}\}/1152 \qquad (v)$$

(s)～(v)式の近似度は1次，3次，3次，5次で，これらを修正等分割公式とよぶ。

以上の各公式と従来の式とを理論分布式$v=v_0\{1-(x/r)\}^{1/m}$（$m=6$～10）および$v=v_0+2.5v_*\ln\{1-(x/r)\}$（$v_*/v_0=0.005$～$0.025$）に適用したときの誤差の百分率はつぎのとおりである。ここに，v_0は中心での最大流速，v_*は摩擦速度で，平均流速Vの理論値は，指数分布に対して$V=\frac{2m^2v_0}{(m+1)(2m+1)}$，対数分布に対して$V=v_0-(15/4)v_*$となる。

表から明らかなように，誤差はすべて正である。平均値公式の誤差は従来のにくらべて1/2～1/4で，同じ精度ならば観測点数を1半径上で2個（計4個）減らすことができる。

理論分布	指数分布 $v=v_0\{1-(x/r)\}^{1/m}$												対数分布 $v=v_0+2.5v_*\ln\{1-(x/r)\}$											
m, v_*/v_0	$m=6$				$m=8$				$m=10$				$v_*/v_0=0.005$				$v_*/v_0=0.015$				$v_*/v_0=0.025$			
公式の名称 ＼ 観測点数	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3	4	5
従来の式	+1.52	+1.00	+0.75	+0.63	+1.31	+0.84	+0.60	+0.48	+1.15	+0.69	+0.58	+0.46	+0.19	+0.13	+0.10	+0.08	+0.59	+0.41	+0.31	+0.24	+1.03	+0.71	+0.55	+0.43
平均値公式	+0.88	+0.38	+0.25	+0.13	+0.84	+0.36	+0.24	+0.12	+0.69	+0.23	+0.12	+0.12	+0.12	+0.06	+0.04	+0.03	+0.39	+0.20	+0.11	+0.08	+0.67	+0.34	+0.19	+0.15
等重公式	+0.88	+0.63	+0.38	+0.38	+0.84	+0.48	+0.36	+0.24	+0.69	+0.46	+0.23	+0.23	+0.12	+0.09	+0.06	+0.05	+0.39	+0.28	+0.19	+0.16	+0.67	+0.49	+0.33	+0.28
修正等分割公式	+1.52	+0.75	+0.63	+0.38	+1.31	+0.60	+0.48	+0.24	+1.15	+0.46	+0.46	+0.23	+0.19	+0.10	+0.08	+0.06	+0.59	+0.32	+0.26	+0.17	+1.03	+0.56	+0.45	+0.30