III—17　　透水係数が変化する滲透流

早稲田大学　正員　　桜井彰雄

透水係数が場所的に変化する場合の，定常的な滲透流の問題を扱う。透水係数が場所的に変化する滲透流の問題や，密度が場所的に変化する流れの問題などは，変媒質中におけるポテンシャル問題と考えられ，均質場における場合と類似の性質がみられる。

二次元問題として，点(x,y)における透水係数を$k(x,y)$とすれば，ダルシーの法則が成立するものとして，

$$\left.\begin{aligned} u &= -k(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ v &= -k(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

但し，$\varphi = y + p/w$

連続の条件は，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0 \quad (2)$$

(2)式は次の様におけば満足される。

$$\left.\begin{aligned} k(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ k(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(3)式は，コーシー・リーマンの方程式の拡張と考えられる。

(3)式から，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0 \quad (4)$$

今，複素函数　$w = f(z)$　をとつて，$W = f(z) = \varphi + i\psi$，$z = x + iy$　とし，φ及びψには(3)の関係があるものとすると，$J = \partial(\varphi,\psi)/\partial(x,y) > 0$　故，wは擬正則函数である。

この場合にも，φとψとは直交関係を有する。

即ち，

$$\varphi_x\psi_x + \varphi_y\psi_y = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\left(-k\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 0 \quad (5)$$

従つて，$\varphi =$ 一定，$\psi =$ 一定なる直線群は互に直交する。

次に，$\vec{e}$を unit vector とすれば，

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial e} &= \frac{\partial\psi}{\partial x}\cos(\vec{e},X) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos(\vec{e},Y) \\ &= k(x,y)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(-\cos(\vec{e},Y)\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\vec{e},X)\right] \end{aligned}$$

こゝで，$-\cos(\vec{e},Y)$，$\cos(\vec{e},X)$は，$\vec{e}$を$90°$正の方向に回転した unit vector $\vec{n}$ の成分である。これから，

同様に，

$$\left.\begin{aligned} k\frac{\partial\varphi}{\partial n} &= \frac{\partial\psi}{\partial e} \\ -\frac{1}{k}\frac{\partial\psi}{\partial n} &= \frac{\partial\varphi}{\partial e} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

今，$\vec{e}$を境界Γに沿ってとつた長さsの方向と考えると，境界での法線速度$k\lambda(s)$が与えられれば，(6)から，

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = k \cdot \lambda(s)$$

$$\therefore \quad \psi = \int_{\Gamma} k \cdot \lambda(s) \, ds \tag{7}$$

この様に，境界上での法線速度が与えられれば，(7)より流線ψが求まり，(3)よりφも求められる。

次に，境界値問題として特別な場合を考えてみる。$k(x,y) = g(x)$とすると，連続の條件(2)は，

$$g \Delta \varphi + g_x \varphi_x = 0 \tag{8}$$

$\varphi = g^{-\frac{1}{2}} \phi$ とおいて，(8)に代入すれば，

$$\Delta \phi = L(x) \phi \tag{9}$$

但し，$L(x) = \dfrac{\Delta(g^{\frac{1}{2}})}{g^{\frac{1}{2}}}$

$\phi = X(x) \cdot Y(y)$ とおいて変数分離を行えば，

$$Y = \begin{cases} \cos ny \\ \sin ny \end{cases}$$

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} = \{L(x) + n^2\} X_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots\cdots \tag{10}$$

常微分方程式(10)の解 X_n が求まり，与えられた境界條件を満たす様に選べるならば，問題は解けたことになる。

$L(x) = 0$ の場合は，最も簡單である。(9)から，$g(x) = (ax+b)^2$ となり，透水係数がx方向に，放物線的に増大する場合である。

この場合，(10) の素解は，

$$X_n = \begin{cases} \cosh nx \\ \sinh nx \end{cases}$$

であるから，φ_n は，

$$\varphi_n = \frac{1}{ax+b} \begin{cases} \cosh nx \\ \sinh nx \end{cases} \begin{cases} \cos ny \\ \sin ny \end{cases} \tag{11}$$

Muskat の近似解法例[1]にこれを適用してみると，(1)で定義されたポテンシャル φ について，

$$\varphi = h_1 - \frac{x(al+b)(h_1^2 - h_2^2)}{2h_1 l (ax+b)} + \frac{2h_1(al+b)}{\pi^2(ax+b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n - \cos \frac{n\pi}{h_1} h_2]}{n^2 \sinh \frac{n\pi l}{h_1}} \cos \frac{n\pi}{h_1} y \, \sinh \frac{n\pi}{h_1} x \tag{12}$$

流量Qは，

$$Q = -\int_0^{h_1} k(0) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=0} dy \tag{13}$$

$$= \sqrt{\frac{k(l)}{k(0)}} \, Q_{01} \qquad := \sqrt{\frac{k(0)}{k(l)}} \, Q_{02} \tag{14}$$

但し，Q_{01} ＝ $k(0)$一様な場合の流量

Q_{02} ＝ $k(l)$一様な場合の流量

(1) Muskat, M. "The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media" 1st Edit. McGraw-Hill P. 377