Ⅲ—9　流体力学の基礎に関する雑考

大阪大学　工博　田中　清

I. Eulerの見方とLagrangeの見方

3次元ユークリッド空間に、一つの固定した直交直線座標系を考え、それをE一空間とし空間点Eの座標を、$x^i(i=1,2,3)$とする。流体のような連続物体に対して、その物体点の集合を考え、その物体点とE一空間の空間点とを一対一対応せしめる。E一空間の直交直線座標に対応するB一空間の物体線を、B空間の座標系とし、空間点Eに対応する物体点Bの座標を、$\bar{x}^\lambda\ (\lambda=1,2,3)$とする。基準配位においては、

$$\bar{x}^\lambda = x^{oi} \tag{1}$$

であり、任意の配位では、時間tをパラメーターとして

$$x^i = x^i(\bar{x}^\lambda, t) \tag{2}$$

となる。B一空間を、E一空間に対応せしめると

$$ds^2 = dx^i\ dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\lambda}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\mu}\cdot d\bar{x}^\lambda\cdot d\bar{x}^\mu = g_{\lambda\mu}d\bar{x}^\lambda\cdot d\bar{x}^\mu \tag{3}$$

E一空間の計量基本テンソルは、δ_{ij}であるが、B一空間の計量基本テンソルは、

$$g_{\lambda\mu} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\lambda}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\mu}$$

である。B一空間$(\bar{x}^\lambda)$がE一空間(x^i)に、一対一対応できるための、必要十分条件は、

$$R^\lambda_{\cdot\mu\nu\omega} = \frac{\partial\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}}{\partial \bar{x}^\omega} - \frac{\partial\left\{{\lambda \atop \mu\omega}\right\}}{\partial \bar{x}^\nu} + \left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\}\left\{{\lambda \atop \alpha\omega}\right\} - \left\{{\alpha \atop \mu\omega}\right\}\left\{{\lambda \atop \alpha\nu}\right\} = 0 \tag{4}$$

であり、E一空間では常に$\left\{{i \atop jk}\right\}=0$であるから、$R^i_{\cdot jkl}=0$が常に成立している。

流体力学では、物体点BのE一空間における対応点Eの座標の時間的変化割合を持って、物体点Bの速度vと定義する。すなわち、

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \tag{5}$$

としている。B一空間において、密度をρ_B、体積増加率をJ_Bとすれば、ρ_B, J_Bは変化しないから

$$J_B = \left|\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu}\right| = \left|\delta^\lambda_\mu\right| = 1 \tag{6}$$

$$\frac{d\cdot\rho_B\cdot J_B}{dt} = \frac{d\cdot\rho_B}{dt} = 0 \tag{7}$$

となって、B一空間では連続方程式が常に成立している。E一空間において、物体点Bの集合に対応する空間点の集合に対して、その体積増加率を、J_Eとすれば

$$J_E = \left|\frac{\partial x^i}{\partial x^{oj}}\right| = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\lambda}\right| = \frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3)} = \sqrt{|g_{\lambda\mu}|} \tag{8}$$

E一空間においては、密度ρ_Eは連続の条件から、

$$\rho_E J_E = \rho^o_E\cdot J^o_E \qquad \text{すなわち、} \qquad \rho_E\cdot\sqrt{|g_{\lambda\mu}|} = \rho_B \tag{9}$$

と定義され、

$$\frac{d\rho_E \cdot J_E}{dt} = \frac{d\rho_E}{dt}\cdot J_E + \rho_E \frac{dJ_E}{dt} = 0 \tag{10}$$

時間のパラメーター t を適当にとれば、 $J_E = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right| = \delta^i_j = 1, \quad \frac{dE}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = div.(\mathbb{v})$

とすることが出来るから、

$$\frac{d\rho_E}{dt} + \rho_E \cdot div(\mathbb{v}) = 0 \tag{11}$$

E−空間では、連続方程式が必要となる。流体力学において速度、密度、力等の諸量を、Euler の見方をして、E−空間で定義すれば、両立の条件(4)は、必要ないが、連続の方程式(11)が必要となり、Lagrange の見方として、B−空間で定義すれば、連続の方程式は、必要ないが、弾性論と同様に、両立の条件 $R^\lambda{}_{\mu\nu\omega} = 0$ が必要となる。

II. Euler の運動方程式と Lagrange の運動方程式

E−空間において、微小ベクトルを、$d\mathbb{r}$ とし、対応点Eの速度を $\mathbb{v}$，加速度を、$\mathbb{a}$ とし、

$$\mathbb{a}\cdot dt = \mathbb{v}(\mathbb{r}+d\mathbb{r},\ t+dt) - \mathbb{v}(\mathbb{r},t) \tag{12}$$

とすれば、E−空間では、$\left\{ {i \atop jk} \right\} = 0$ であるから、

$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\cdot v^j \tag{13}$$

E−空間において、E点に、作用する力を $\mathbb{F}_E$ とすれば、

$$\rho_E\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\cdot v^j\right) = F_E^i \tag{14}$$

上式は、Euler の運動方程式である。

座標 (x^i) を物体点 B の運動に対して、E−空間の流動座標と考へる。B−空間における、物体点 B の運動をE−空間において見る時の速度 $\bar{\mathbb{v}}$，加速度 $\bar{\mathbb{a}}$ は、

$$\bar{v}^i dt = x^i(\bar{x}^\lambda,\ t+dt) - x^i(\bar{x}^\lambda, t),\quad すなわち\quad \bar{v}^i(\bar{x}^\lambda) = \frac{\partial x^i}{\partial t} \tag{15}$$

$$\bar{\mathbb{a}}\cdot dt = \bar{\mathbb{v}}(\bar{x}^\lambda\ t+dt) - \bar{\mathbb{v}}(\bar{x}^\lambda, t),\quad すなわち\quad \bar{a}^i(\bar{x}^\lambda) = \frac{\partial v^i}{\partial t} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} \tag{16}$$

物体点 B に作用する力を、E−空間において見る力を $\bar{\mathbb{F}}_E$ とすれば、

$$\rho_E \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} = \bar{F}_E^i \qquad または、\qquad \rho_E\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_i = \bar{F}_{Ei} \tag{17}$$

$x^i = x^i(\bar{x}^\lambda)$ なる変換をすれば

$$\rho_E\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\lambda} = \bar{F}_{Ei}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\lambda} \tag{18}$$

直交直線座標系ならば、反変成分と共変成分とは、同一であるから、

$$\rho_E \cdot \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\lambda} = \bar{F}_E^i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\lambda} \tag{19}$$

上式は、Lagrange の運動方程式である。

E－空間の初め座標が，曲線座標なれば，Lagrange の運動方程式は，(18) である。
このLagrange の運動方程式は B－空間から，運動を調べるものではなく，たゞ単にE－空間で，$x^i = x^i(\bar{x}^\lambda)$ なる変換を行ったに過ぎない。
真に Lagrrnge の見方をして，B－空間で力 $\bar{F}_B$ を定義すれば

$$\rho_B \frac{\delta \bar{x}}{\delta t^2} = \bar{F}_B{}^\lambda \tag{20}$$

となり，連続方程式が消失して，両立の条件が必要となり，力 $\bar{F}_B$ は，テンソル
$\gamma_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\mu} - \delta_{\lambda\mu})$ によって，規定せられる。

Ⅲ　流体力学の拡張

Eddington ; The mathematical theory of relativity , P117 に従い
エネルギ・テンソル T^{ij} を考え，座標系密度を ρ とし，$i, j = 1, 2, 3, 4$ に対して

$$T^{ij} = \rho \frac{dx^i}{ds} \cdot \frac{dx^j}{ds} \quad \rho \cdot v^i \cdot v^j \tag{21}$$

とおき，物体に作用する力 $F(F^i)$ に対して，運動と連続の方程式は，

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = \rho F^i \tag{22}$$

であり，従来のガリレオ座標では，$x^4 = t$，$s = t$，$v^4 = 1$，$F^4 = 0$ としているために，運動方程式と連続方程式とが異なる形をとっているが，時刻座標 $t = x^4$ の方向の速度 v^4，力 F^4 を仮定概念とすれば，運動方程式と連続方程式とは同形となり，さらに外力のポテンシャルを Ω，水圧を p とすれば，$F^i = \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho\Omega - p)$ であるから，流体力学の基礎方程式は 連続方程式をも含めて

$$\nabla_j (T^{ij} - \rho\Omega + p) = 0 \tag{23}$$

となる。たゞし，$i, j = 1, 2, 3, 4$ とする。

粘性流体において，内部応力のテンソルを p^{ij} とすれば

$$\nabla_j (T^{ij} - \rho\Omega + p^{ij}) = 0 \tag{24}$$

$T^{ij} + p^{ij} = Q^{ij}$ とおけば

$$\nabla_j (Q^{ij} - \rho\Omega) = 0 \tag{25}$$

参考文献

1. Eddington ; Mathematical Theory of Relativity
2. 小谷正雄 ; 連続物体の力学 (岩波講座 ; 数学)
3. 山本善之 ; 有限変位の弾性論 (岩波講座 ; 現代応用数学)
4. 近藤一夫 ; 変形の幾何学 (岩波講座 ; 現代応用数学)
5. Lock ; The Equation of motion of a Viscous Fluid in Tensor Notation, Reports and Memo. of ARC., No. 1290 (Ae 439), 1929