

I—30 板の弾塑性状態に関する研究

正員 京都大学工学部 工博 成岡昌夫

正員 京都大学工学部 山本知弘

1. 概説 板の弾塑性問題に関する研究は、極めて少なく、従来まで行われた研究の多くは、極限荷重を扱ったもので、とくに、Johansen の yield line theory は秀れたものであって、極限荷重を簡単な計算から求めることができる。しかし、板が弾塑性状態を経て、塑性状態にいたり、崩壊にいたる過程を取扱った研究は少い。W. Swida は小さいたわみの場合について、基礎微分方程式を誘導している。

2. 弾塑性状態における短形板 弾塑性状態における板を一般的に取り扱うことは極めて困難であって、ここでは、次のような仮定を設ける。(i) 板のたわみは板厚に比して小である。(ii) 中立面に垂直な直線上の一点は、変形後も同一直線上にあり、たわみ曲面にたいして垂直である。(iii) 板は完全塑性体で、引張り強さと圧縮強さは等しい。

いま、板の一部が図1に示すように、弾塑性状態にあって、中立面から弾塑性境界Cにいたる距離を z とすると、弾塑性境界Cにおける

応力は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E\zeta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{E\zeta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{E\zeta}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

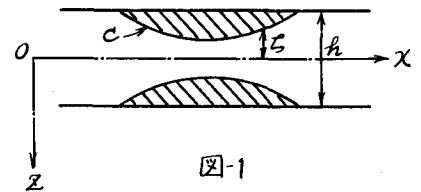


図-1

となる。また、Von Mises-Hencky の降伏条件式は、

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2 \quad (2)$$

ただし、 ν はポアソン比、 σ_0 は単純引張応力状態における降伏応力である。(1)式を(2)式に代入すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{E^2 \zeta^2}{(1-\nu^2)^2} & \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right. \\ & \left. + 3(1-\nu^2)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = \sigma_0^2 \end{aligned} \quad (3)$$

また一方、弾性領域の応力は、フックの法則にしたがい、塑性領域の応力は一定であるとして、弾塑性断面の曲げモーメント および、捩りモーメントを求めると、次のようになる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{E\zeta}{1-\nu^2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -\frac{E\zeta}{1-\nu^2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$M_{xy} = -\frac{E\zeta}{1+\nu} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

板の釣合式は既知のように、

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (5)$$

(4)式を(5)式に代入すると、次のような微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \zeta \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\zeta^2}{3} \right) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \left(\frac{h^2}{2} - 2\zeta^2 \right) \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] \\ & + \left[\left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - 2\zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left[\left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - 2\zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ & + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2 \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} - 2\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1-\nu^2}{E} p(x, y) \end{aligned} \quad (6)$$

3. 例題 図-2 に示すような、周辺単純支持正方形板に等分布荷重が満載される場合について考察してみる。(3)式および(6)式の基礎微分方程式を階差式を用いて近似的に解く。

いま 荷重強度としては、中央点1の上下縁が丁度降伏応力となるようにし、板の断面寸法を次のように定める。

$$\begin{aligned} p &= 2.1307 \text{ kg/cm}^2, & a &= 100 \text{ cm} \\ h &= 1 \text{ cm}, & \bar{\sigma}_0 &= 4.5 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2 \\ E &= 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \end{aligned}$$

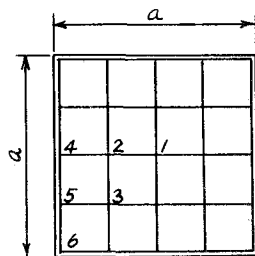


図-2

(3)式および(6)式で、 $\nu=0$ として各点で階差式をたて得られた、多元高次連立方程式をNewtonの方法で近似的に求めると、各点のたわみおよび中立面から弾塑性境界Cに至る距離Zは次のようである。ただし、 $\zeta = Z(h/2)$ として、 ζ を無次元化した記号Zで表わす。

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1.0335, & \omega_1 &= 4.7067 \\ Z_2 &= 1.3174, & \omega_2 &= 3.4108 \\ Z_3 &= 1.0690, & \omega_3 &= 2.4343 \\ Z_4 &= \infty, & \omega_4 &= \omega_5 = \omega_6 = 0 \\ Z_5 &= 0.9068, \\ Z_6 &= 0.6353, \end{aligned}$$

Johansenのyield line theoryによると、このような周辺単純支持正方形板のyield lineは、対角線方向に入ることがわかっていて、この計算結果とよく一致する。ただし、ここで注目すべきことは、yield lineは隅角部から中央部に入ることが予想される。このことは、弾性理論を用いても簡単に説明される。