I—28　広さ無限の平板ならびに無梁板の解法について

金沢大学工学部　正員　小野一良

無梁板の解法として Lewe ならびに棚橋の解法が理論上最も正しいとされている。これらの解法はいずれも荷重ならびに板のたわみを Fourier の2重級数であらわし，その係数を基礎微分方程式ならびに境界条件を満足するように定めている。しかし無梁板に加わる荷重ならびに柱より受ける反力の大きさが分っているならばこれを広さ無限の平板に多数の荷重が作用するとなし，1箇づつの荷重による影響を加え合せることによつて解くことができるはずである。

つぎに広さ無限の平板の一部分に単位の垂直荷重またはモーメントが作用した場合に平板に生ずるたわみならびに曲げモーメントを計算して見よう。いま平板の剛度を D とし，平板のたわみを w とし，平板上の各点を直角座標 (x,y) または極座標 (r,θ) であらわすこととする。計算の便宜上

$$M_1=-\frac{D}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\ ,\quad M_2=-\frac{D}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\quad M_3=-D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{1}$$

とおけば平板に生ずる曲げモーメントは次式によってあらわすことができる。

$$M_x=(1+\nu)M_1+(1-\nu)M_2\ ,\quad M_y=(1+\nu)M_1-(1-\nu)M_2\ ,\quad M_{xy}=(1-\nu)M_3 \tag{2}$$

いま平板上の半径 s なる円内に大きさ P なる垂直荷重を加えた場合を考え，この荷重の分布を次式によつて示す。

$$r\leqq s \text{ において } p=f(r)\ ,\quad r>s \text{ において } p=0 \tag{3}$$

ただし　$$\int_0^s 2\pi r f(r)\,dr=P \tag{4}$$

しかるときには平板に生ずるたわみおよび曲げモーメントは次式によって計算できる。

$$r\geqq s \text{ において } w=\frac{P}{8\pi D}\left\{(r^2+\alpha s^2)\log\frac{r}{l}+c+\alpha s^2\right\} \tag{5}$$

$$r\geqq s \text{ において } M_1=-\frac{P}{4\pi}\left(1+\log\frac{r}{l}\right)$$

$$M_2=-\frac{P}{8\pi}\left(1-\frac{\alpha s^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\ ,\quad M_3=-\frac{P}{8\pi}\left(1-\frac{\alpha s^2}{r^2}\right)\sin 2\theta \tag{6}$$

ここに c および l は積分常数であり，α は $f(r)$ の形によって定まる常数である。

つぎに平板上の半径 s なる円内に $\theta=\pi/2$ を軸とする大きさ T なるモーメントが作用した場合を解くこととし，このモーメントは次式による分布荷重であらわす。

$$r\leqq s \text{ において } p=g(r)\cos\theta\ ,\quad r>s \text{ において } p=0 \tag{7}$$

ただし　$$-\int_0^s \pi r^2 g(r)\,dr=T \tag{8}$$

しかるときには平板に生ずるたわみおよび曲げモーメントは次式によつて計算できる。

$r \geqq s$ において $w=\frac{T}{8\pi D}\left\{r\left(1+2\log\frac{r}{l}\right)+\frac{\beta s^2}{2}\cdot\frac{1}{r}\right\}\cos\theta$ (9)

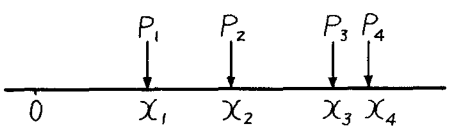
$r \geqq s$ において $M_1=-\frac{T}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r}$, $M_2=-\frac{T}{8\pi}\left(\frac{\cos\theta-\cos 3\theta}{r}+\beta s^2\frac{\cos 3\theta}{r^3}\right)$,

$M_3=-\frac{T}{8\pi}\left(\frac{\sin\theta-\sin 3\theta}{r}+\beta s^2\frac{\sin 3\theta}{r^3}\right)$ (10)

上式において β は $g(r)$ の形によって定まる常数である。

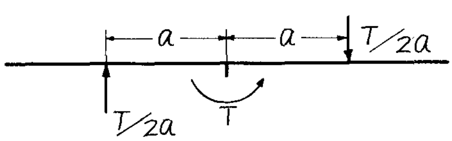
(5) および (9) 式によれば $r\to\infty$ となるとき $w\to\infty$ となるので $r\to\infty$ のとき $w\to 0$ とする境界条件を満足させることはできない。しかしながら平板上に数箇の荷重またはモーメントが作用するときその作用点ならびに荷重の大きさの間にある関係が成立すれば $r\to\infty$ において $w\to 0$ とすることができる。このときには当然平板に生ずる曲げモーメントも $r\to\infty$ において 0 となる。たとえば図-1に示すごとく平板上の一直線上に4箇以上の荷重が作用し，その荷重の間につぎの関係が成立するときには $r\to\infty$ において $w\to 0$ となる。

図-1



$\Sigma P_n=0$, $\Sigma P_n x_n=0$, $\Sigma P_n x_n^2=0$ (11)

図-2

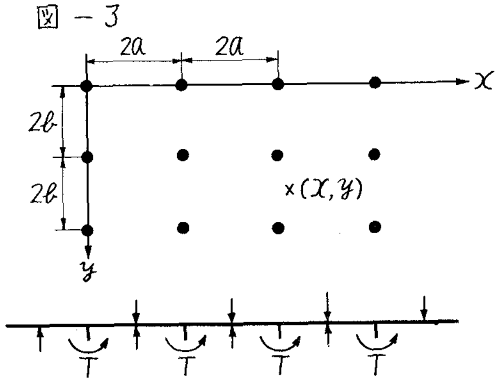


ただしこれらの荷重について αs^2 の値は等しいとする。また図-2に示すごとく1箇のモーメント T とこれを挟む2箇の荷重 $\pm T/2a$ があるときには $r\to\infty$ において $w\to 0$ となる。

一般に平板に多数の荷重またはモーメントが作用する場合にはこれを上記の性質を持つ荷重の組み合せに分解し，各の組み合せについて平板のたわみまたは曲げモーメントを計算して後にこれを集計すればよい。

一例として無梁板の面内に x 軸方向の水平力が作用し，この反力として無梁板の各柱より等しい大きさのモーメントを受ける場合に平板に生ずる曲げモーメントを計算する。無梁板の柱の間隔を x 軸方向に $2a$ とし，y 軸方向に $2b$ とする。この無梁板が各柱より y 軸方向を軸とするモーメント T を受ける場合には図-2に示すごとく T の両側に $\pm T/2a$ なる垂直荷重を附加して考えることにする。この垂直荷重は隣の柱より作用するモーメントに附加された垂直荷重によって打消されて結局は平板に作用する垂直荷重はすべて消失する。無梁板上の $(2ma, 2nb)$ なる位置に作用するモーメント T およびこの両側に附加された垂直荷重 $T/2a$ によって (x, y) 点に生ずる曲げモーメント $M_1(m,n)$

図-3



は (6) および (10) 式を用いて計算され，その結果を次式に示す。

$$M_1(m,n)=-\frac{T}{4\pi}\frac{x-2ma}{(x-2ma)^2+(y-2nb)^2}+\frac{T}{8\pi a}\left\{1+\frac{1}{2}\log\frac{(x-2ma+a)^2+(y-2nb)^2}{l^2}\right\}$$

$$-\frac{T}{8\pi a}\left\{1+\frac{1}{2}\log\frac{(x-2ma-a)^2+(y-2nb)^2}{l^2}\right\} \tag{12}$$

ただし　$(x-2ma)^2+(y-2nb)^2 \geqq \Delta^2$

上式による m, n を $-\infty$ から $+\infty$ までのすべての整数として $M_1(m,n)$ を計算し，これを合計すれば所要のモーメント M_1 が求められる。いまここに

$$x+iy=z\ ,\quad 2ma+2inb=\Omega_{m,n} \tag{13}$$

とおけば

$$M_1=-\frac{T}{4\pi}\sum_{m,n}\mathcal{R}\left(\frac{1}{z-\Omega_{m,n}}+\frac{1}{2a}\log\frac{z-\Omega_{m,n}-a}{z-\Omega_{m,n}+a}\right) \tag{14}$$

上式において $\mathcal{R}(\ )$ は ( ) 内の数値の実数部を示す。また上式の ( ) 内の数値は $|z-\Omega_{m,n}|\to\infty$ となるとき $\frac{a^2}{3}(z-\Omega_{m,n})^{-3}$ となるので (14) 式は絶対収斂級数となる。

ここに　$$Z(z)=\sum_{m,n}\left(\frac{1}{z-\Omega_{m,n}}+\frac{1}{2a}\log\frac{z-\Omega_{m,n}-a}{z-\Omega_{m,n}+a}\right) \tag{15}$$

とおき，これを z で 2 回微分すれば

$$Z''(z)=\sum_{m,n}\left\{\frac{2}{(z-\Omega_{m,n})^3}+\frac{1}{2a(z-\Omega_{m,n}+a)^2}-\frac{1}{2a(z-\Omega_{m,n}-a)^2}\right\} \tag{16}$$

上式の右辺は *Weierstrass* の楕円函数によつてあらわすことができる。すなわち

$$Z''(z)=-\wp'(z)+\frac{1}{2a}\wp(z+a)-\frac{1}{2a}\wp(z-a) \tag{17}$$

ただしここに $\wp'(z)$ ならびに $\wp(z)$ の周期は $2a$ および $2ib$ とする。上式において $\wp(z+a)=\wp(z-a)$ となることを考慮し，かつ z で 2 回積分すれば次式が得られる。

$$Z(z)=\zeta(z)+Az+B \tag{18}$$

ここに A および B は積分常数とする。上式を (14) 式に代入し，かつ M_1 は x について $2a$ なる周期を有すること，および $z=a$ のとき $M_1=0$ となることを考慮して A，B を決めれば次式が得られる。

$$M_1=-\frac{T}{4\pi}\mathcal{R}\left\{\zeta(z)-\zeta(a)\frac{z}{a}\right\} \tag{19}$$

上式を計算し易い形に書き直せば

$$M_1=-\frac{T}{8a}\mathcal{R}\left\{\cot\frac{\pi(x+iy)}{2a}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\coth n\pi\frac{b}{a}-1\right)\sin 2n\pi\frac{x+iy}{2a}\right\} \tag{20}$$

上式において Σ の中の項は n が増すとき速かに収斂し，通常の計算においては才 2 項まで採れば充分である。

M_2 および M_3 に関しても同様な方法で計算式が誘導され，その結果をつぎに示す。

$$M_2 - iM_3 = \frac{\pi T}{8a}\left\{ -\frac{\dfrac{iy}{2a}}{\sin^2\dfrac{\pi(x+iy)}{2a}} + 4\frac{iy}{2a}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\coth n\pi\frac{b}{a}-1\right)\cos 2n\pi\frac{x+iy}{2a}\right.$$

$$\left. -2\frac{b}{a}\sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{\sin 2n\pi\dfrac{x+iy}{2a}}{\sinh^2 n\pi\dfrac{b}{a}}\right\} + \frac{\pi T}{8a}\cdot\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\pi s^2}{4a^2}\left\{-\frac{\cos\pi\dfrac{x+iy}{2a}}{\sin^3\pi\dfrac{x+iy}{2a}}\right.$$

$$\left. +4\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\coth n\pi\frac{b}{a}-1\right)\sin 2n\pi\frac{x+iy}{2a}\right\} \qquad (21)$$

上式の右辺を実数部と虚数部に分ければ M_2 および M_3 が求められる。

β の値に関しては不明の所が多いが，(7) 式における $g(r)$ が次式で与えられたときには β は (23) 式によって計算される。

$$g(r) = \sum_{\mu} p_{\mu}\left(\frac{r}{s}\right)^{\mu} \qquad \text{ただし} \quad \mu+3>0 \quad \text{とする。} \qquad (22)$$

$$T = -\pi s^3\sum_{\mu}\frac{1}{\mu+3}p_{\mu}\ , \quad \beta T = -\pi s^3\sum_{\mu}\frac{1}{\mu+5}p_{\mu} \qquad (23)$$

また $r=s$ において $\dfrac{\partial w}{\partial r}=\dfrac{w}{r}$ となる條件より β を求めれば $\beta=2$ となる。これは柱の上で平板が変形しないことを意味する。