I —26 階差法により平板を解く場合の精度について

岐阜大学工学部　正員　四野宮哲郎

1. 緒論

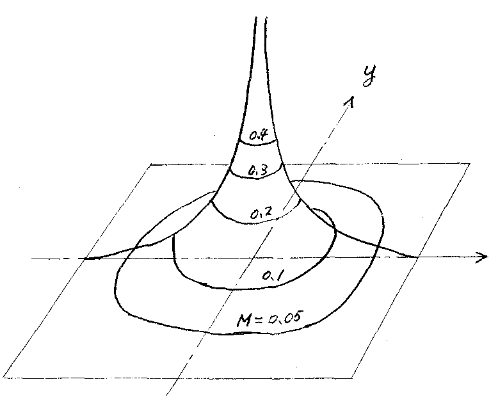
階差法によれば　形と境界條件にかゝわらず，平板の微分方程式を解き得るので非常に便利であるが　網目を粗くすると精度が落ちる．網目間隔と精度の関係については　従来何等定量的結論が得られておらず　こゝにそれを示すことも出来ないが，たわみを基にして直角2方向の曲げモーメント M_x, M_y を求める場合に，その附近だけ網目を細分して，それ等に対する精度を上げる方法はMarcus氏等により早くから提唱されている，階差法を使用した場合の誤差は　一般に分布荷重に対しては小さく，集中荷重に対しては(特に載荷点附近で) 大きいようである．こゝでは，網目細分法を応用し，集中荷重載荷点附近のたわみの誤差を小さくして求める一つの工夫を述べる。

2. 集中荷重載荷点のモーメント和Mの状態.

モーメント和は　$M=\frac{1}{1+\nu}(M_x+M_y)$　ν: ポアソン比　で表わされ　平板の微分方程式

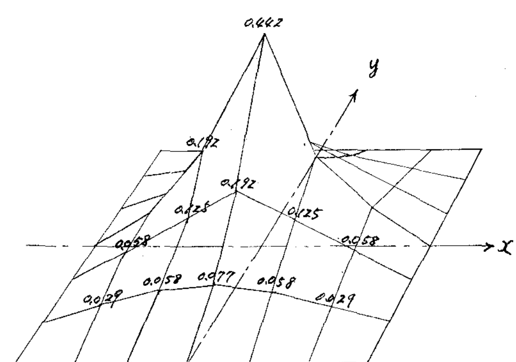
$\nabla^4 w=\frac{p}{N}$　(w: たわみ，p 荷重強度，N 板剛度)　は　$\nabla^2 M=-p$　$\nabla^2 w=-M/N$

に2分される。故に周辺自由支承のときは，弾性膜を考え　これに所定の荷重をのせてたわみを求めればそれがMを与え，さらにこのMを荷重と考えればその場合のたわみが求める平板のたわみとなる，さて集中荷重が弾性膜に作用すると作用点では理論的には $M=\infty$　となる，但ある範囲内のM面と基準面の間の体積は有限である．図－1 に正方形平板(周辺自由支承)に集中單位荷重が作用した場合のMの分布状態を示す．階差法でMを求めると　図－2 のようになる，最大値は有限であるが相当に大きく，しかも網目を細かくするほど　値が増し　M面は尖って来る．



図－1

(Adolf Pucher;
Die Momenteinflussfelden Rechteckigen Platten
を参照して画いたもの．)

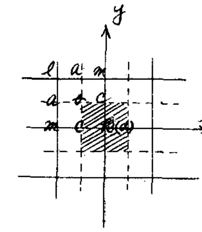


図－2

(各辺を6等分し，階差法によって解く)

3. M－荷重の修正.

以下説明を簡単にするために 図－1, 2 同様載荷点を中心に4軸対称の場合を考え普通の方法で, 図－3 の l, m, k (kが載荷点) 点のMの値 M_l, M_m, M_k が求められたとする, 普通の階差法ならば強度 M_k のM荷重が図－3の斜線部分全体に等分布する(角塔型)と考えて弾性膜を解くことになる。M_kは図－2でいえば角錐状M面の頂点, 0.442 であるからこの方法では誤差が大きくなるのは当然である, そこで先づ図－3の点線のように網目を細分それによって新たに生じた格点を a, b, c, d (dはkと同一点であるが細分の前後を区別するため別の記号を使う)とする, Mは内挿法により



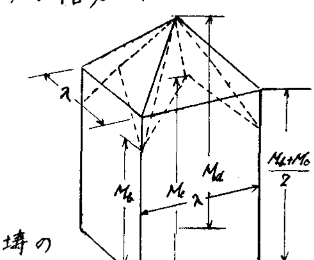
図－3

$$M_a = \frac{3M_m + M_l}{4}$$ となり他の3点のMは細分網目に対する階差式から

$$\begin{cases} M_b = \frac{P}{16}(12M_k + 4M_m + 1) \\ M_c = \frac{P}{8}(4M_k + 4M_m + 1) \\ M_d = \frac{P}{8}(4M_k + 4M_m + 3) \end{cases}$$

となることがわかる。

これを使用して, 図－4のようにk点に対するM荷重を角錐と角塔の組合せと考える, 即その荷重強度$\overline{M_d}$(面積λ^2内の平均)



図－4

(点線と実線は同一体積)

$$\overline{M_d} = \frac{M_b + M_c}{2} + \frac{1}{3}\left(M_d - \frac{M_b + M_c}{2}\right) = \frac{1}{48}(41M_m + 7M_l + 9)$$

となる, 即実際には細分の手続を経ないでも M_m, M_lを知れば直ちに$\overline{M_d}$を得る. M荷重によって弾性膜を解く場合にこの$\overline{M_d}$を使用するのである, 次に正方形平板(一辺の長さ a 周辺自由支承)の網目を一辺4等分から10等分迄細かくした場合のM_k, M_d, $\overline{M_d}$ の値, さらにM_kにより(普通の方法)又$\overline{M_d}$により(こゝで提案した方法)再び弾性膜を解いて求めた, たわみωを表示すれば次のようになる, 不静定平板にこの方法を適用するときは普通の方法でωを求め逆にMを求めてから同様の計算をしなければならない。

種別＼網目		4等分	6等分	8等分	10等分	解析解法による精密解
M (単位P)	M_k	0.375	0.442	0.489	0.525	∞
	M_d	0.492	0.559	0.608	0.641	
	$\overline{M_d}$	0.303	0.370	0.420	0.452	
ω (単位 $\frac{Pa^2}{N}$)	ω_k	0.0547	0.0511	0.0495	0.0485	0.0463*
	誤差(%)	18	11	6.9	4.8	
	$\overline{\omega_d}$	0.0480	0.0476	0.0473	0.0470	
	誤差	3.7	2.8	2.2	1.5	

* Timoshenko "Theory of Plates and Shells" P158