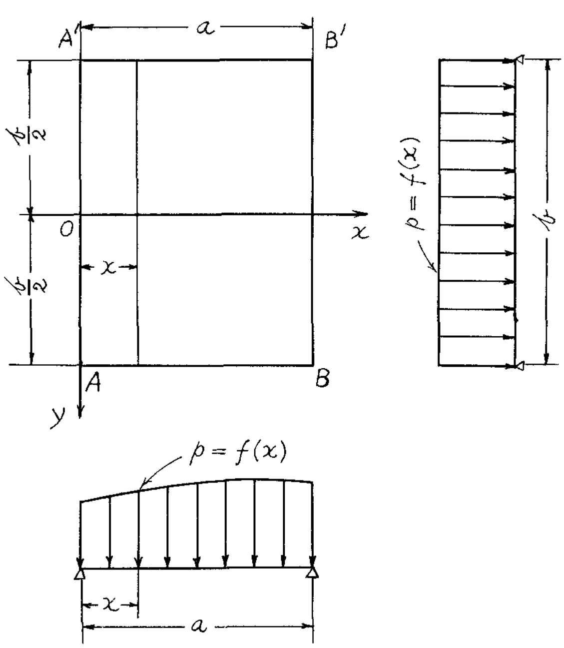
I―25　単純支持矩形板の任意荷重による Nadai 解

信州大学工学部　正会員　谷本勉之助

四辺が単純支持の矩形板の Nadai 解については，等分布荷重，静水圧荷重などの個々の場合の解が与えられている。これらを含んで，一方向の任意分布荷重として弾性諸量を計算したのが本文である。



図－1

図－1 のたわみ w，モーメント（M_x, M_y, T_x），せん断力（S_x, S_y），周辺分布反力（$(-V_x)_{x=0}$，$(V_x)_{x=a}$，$(\pm V_y)_{y=\pm \frac{b}{2}}$），四隅集中反力（$R$，$R$）はそれぞれ次のとおりになる。

$$w=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[1-\frac{1}{2\cosh\alpha_n}\left\{(2+\alpha_n\tanh\alpha_n)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\cosh\frac{n\pi y}{a}-\frac{n\pi y}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}\right\}\right]\sin\frac{n\pi x}{a},$$

ここに

$$a_n=\frac{2a^3}{\pi^4 D}\frac{1}{n^4}\int_0^a f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}d\xi,$$

$$\alpha_n=\frac{n\pi b}{2a},\qquad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

（E：ヤング率，ν：ポアソン比，h：板の厚さ.）

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{D\pi^2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^2\left[1-\frac{1}{2\cosh\alpha_n}\left\{[2+(1-\nu)\alpha_n\tanh\alpha_n]\cosh\frac{n\pi y}{a}\right.\right.$$

$$\left.\left.-(1-\nu)\frac{n\pi y}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}\right\}\right]\sin\frac{n\pi x}{a},$$

$$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=\frac{D\pi^2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^2\left[\nu-\frac{1}{2\cosh\alpha_n}\left\{[2\nu-(1-\nu)\alpha_n\tanh\alpha_n]\cosh\frac{n\pi y}{a}\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1-\nu)\frac{n\pi y}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}\right\}\right]\sin\frac{n\pi x}{a},$$

$$T_x=-T_y=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{(1-\nu)D\pi^2}{2a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n n^2}{\cosh\alpha_n}\left[(1+\alpha_n\tanh\alpha_n)\sinh\frac{n\pi y}{a}\right.$$

$$- \frac{n\pi y}{a} \cosh \frac{n\pi y}{a} \Big] \cos \frac{n\pi x}{a},$$

$$S_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = \frac{D\pi^3}{a^3} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^3 \left(1 - \frac{1}{\cosh \alpha_n} \cosh \frac{n\pi y}{a} \right) \cos \frac{n\pi x}{a},$$

$$S_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w = -\frac{D\pi^3}{a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n n^3}{\cosh \alpha_n} \sinh \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{n\pi x}{a},$$

$$(-V_x)_{x=0} = \left(S_x + \frac{\partial T_x}{\partial y} \right)_{x=0} = \frac{D\pi^3}{a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n n^3}{\cosh \alpha_n} \Big[\cosh \alpha_n - \left\{ 1 - \frac{1-\nu}{2} \alpha_n \tanh \alpha_n \right\} \cosh \frac{n\pi y}{a}$$

$$- \frac{1-\nu}{2} \frac{n\pi y}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a} \Big],$$

$$(V_x)_{x=a} = -\left(S_x + \frac{\partial T_x}{\partial y} \right)_{x=a} = \frac{D\pi^3}{a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a_n n^3}{\cosh \alpha_n} \Big[\cosh \alpha_n$$

$$- \left\{ 1 - \frac{1-\nu}{2} \alpha_n \tanh \alpha_n \right\} \cosh \frac{n\pi y}{a} - \frac{1-\nu}{2} \frac{n\pi y}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a} \Big],$$

$$(\pm V_y)_{y=\pm \frac{b}{2}} = \pm \left(-S_y + \frac{\partial T_y}{\partial x} \right)_{y=\pm \frac{b}{2}}$$

$$= \frac{D\pi^3}{2a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n n^3}{\cosh^2 \alpha_n} \left\{ (3-\nu) \cosh \alpha_n \sinh \alpha_n - (1-\nu) \alpha_n \right\} \sin \frac{n\pi x}{a},$$

$$R_A = R_{A'} = \frac{b}{2} \int_0^a f(x)\,dx - \frac{b}{2a} \int_0^a x f(x)\,dx$$

$$- \frac{D\pi^2}{a^2} \sum_{n=1,2,3,\cdots}^{\infty} \frac{a_n n^2}{\cosh^2 \alpha_n} \left[\alpha_n \cosh^2 \alpha_n + (1-\nu) \cosh \alpha_n \sinh \alpha_n - (1-\nu) \alpha_n \right],$$

$$R_B = R_{B'} = \frac{b}{2a} \int_0^a x f(x)\,dx$$

$$- \frac{D\pi^2}{a^2} \sum_{n=1,2,3,\cdots}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a_n n^2}{\cosh^2 \alpha_n} \left[\alpha_n \cosh^2 \alpha_n + (1-\nu) \cosh \alpha_n \sinh \alpha_n - (1-\nu) \alpha_n \right].$$

上の解は $b>a$ のときに収束がよい。特殊な場合について数値計算を人手で行ってみたが，ある量については，さらに級数の収束化を行うとか，Euler-Maclaurin式を使うとかする必要があった。

$b<a$ のときに収束のよい解の方も，上と同じようにして計算がすんでいるが，ここには記さない。

昭和 33 年度科学研究費の配当をうけたことに対して感謝する。