

I-24 周辺が円筒殻又は円環によって弾性固定されている 円板の対称曲げについて

建設省土木研究所 正員 〇栗林栄一
別府 精
杉山幸雄

周辺が円筒殻又は円環によって弾性固定されている図-1のような円板に等分布荷重が作用した場合の対称曲げの計算式を、図-2および3のような簡単な仮定のもとに導いた。

円板の曲げの微分方程式

$$D_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 w = g, f(r), \quad D_0 = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots \dots (1)$$

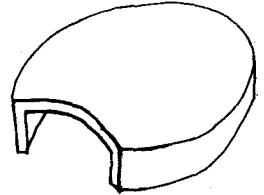
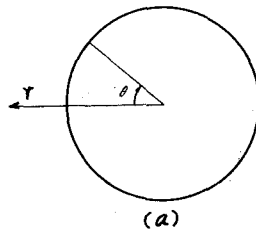


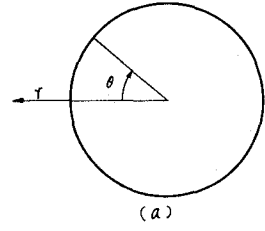
図-1

周辺条件は二ヶ必要とする。円筒殻ならびに円環の場合に対しては(2)式および(3)式より得られる M_0 , Q_0 がそれぞれ二ヶの条件式となる。

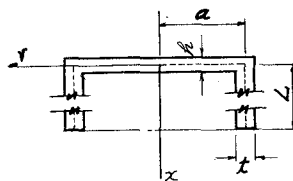
$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 y}{dx^4} + 4\beta^4 y &= \frac{Z}{D}, \quad Z=0 \\ \text{但し, } D &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \\ \beta^4 &= \frac{3(1-\nu^2)}{a^2 t^2} \\ \text{但し } x=0 \text{ で} \\ -D(d^2 y/dx^2) &= M_0, \\ -D(d^3 y/dx^3) &= Q_0. \\ x=L \text{ で} \\ -D(d^2 y/dx^2) &= 0 \\ -D(d^3 y/dx^3) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$



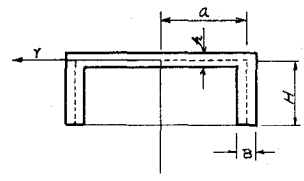
(a)



(a)

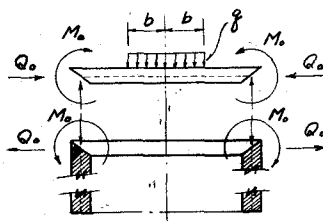


(b)

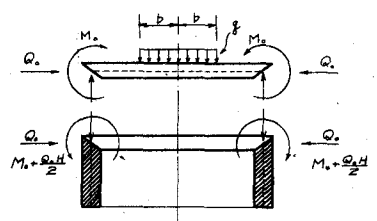


(b)

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{EI} a d\theta + \varphi d\theta &= 0 \\ \left(\frac{1-\nu^2}{N} + \frac{a^2}{EA} \right) Q_0 &= \frac{\varphi H}{2} \\ M &= \int_0^\pi M_0 \sin \theta r d\theta = M_0 a \\ N &= \frac{E_0 h}{(1-\nu^2)} \end{aligned} \right\} \dots (3)$$



(c)



(c)

図-2. 周辺が円筒殻によって弾性固定されている円板。
図-3. 周辺が円環に弾性固定されている円板。

以上の式より得られた計算結果をまとめるとつぎのようになる。

1) 円筒殻と弾性固定されている場合の円板の周辺条件

$$M_0 = \frac{1}{(1+\nu_0)\alpha+1} \cdot \frac{8b^2}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{b^2}{a^2} - 1 \right), \quad Q_0 = \mu' \beta M_0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

但し, $\mu = \{U_1 + U_2 - U_3 + U_4 + (V_1 + V_2 - V_3 + V_4) \cdot \mu'\} / 2\alpha\beta D$

$$\mu' = -(U_1 + U_3) / \beta \{V_1 + V_3 - D(1-\nu)a/N\}$$

$$U_1 = -\{(-\cos K + \sin K)^2 - 2\cos^2 K + (\sinh K - \cosh K)^2\} \quad V_1 = -\{(\sin K - \cos K)^2 - (\sinh K - \cosh K)^2\}$$

$$U_2 = -\{(-\cos K + \sin K)^2 - 2\sin^2 K + (\sinh K - \cosh K)^2\} \quad V_2 = -\{-2\sin^2 K\}$$

$$U_3 = -\{(\cos K + \sin K)^2 - 2\cos^2 K + (\sinh K + \cosh K)^2\} \quad V_3 = -\{-(\sin K + \cos K)^2 + (\sinh K + \cosh K)^2\}$$

$$U_4 = -\{(\cos K - \sin K)^2 + 2\sin^2 K - (\sinh K + \cosh K)^2\} \quad V_4 = -\{-2\cos K \sin K\}$$

$$D = 4(\sinh^2 K - \sin^2 K) \quad K = \beta \cdot L$$

ii) 円環と弾性固定されている場合の円板の周辺条件

$$M_0 = \frac{1}{(1-\nu_0)\alpha+1} \cdot \frac{8b^2}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{b^2}{a^2} - 1 \right), \quad Q_0 = \alpha' \frac{M_0}{h} \quad \dots \dots \dots (5)$$

但し, $\alpha = \frac{D}{\frac{EI}{a} + (\frac{H}{2})^2 \frac{1}{(1-\nu_0) \frac{1}{N} + \frac{a}{EA}}}$; $\alpha' = -\frac{Hh}{2a} \frac{1}{(1-\nu_0) \frac{1}{N} + \frac{a}{EA}}$

$A = BH, \quad I = \frac{BH^3}{12}$

したがって円板に生ずる曲げモーメントはつぎのようになる。

$0 \leq r \leq b$ では

半径方向 $M_r = \frac{8b^2}{4} \left\{ (1+\nu_0) \log \frac{a}{b} + 1 - \frac{(1-\nu_0)b^2}{4a^2} - \frac{(3+\nu_0)r^2}{4b^2} \right\} + M_0$ } $\dots \dots (6)$

接線方向 $M_\theta = \frac{8b^2}{4} \left\{ (1+\nu_0) \log \frac{a}{b} + 1 - \frac{(1-\nu_0)b^2}{4a^2} - \frac{(3+\nu_0)r^2}{4b^2} \right\} + M_0$

$b \leq r \leq a$ では

半径方向 $M_r' = \frac{8b^2}{4} \left\{ (1+\nu_0) \log \frac{a}{r} + \frac{(1-\nu_0)b^2}{4} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right\} + M_0$ } $\dots \dots (7)$

接線方向 $M_\theta' = \frac{8b^2}{4} \left\{ (1+\nu_0) \log \frac{a}{r} - \frac{(1-\nu_0)b^2}{4} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{a^2} - 1 \right) \right\} + M_0$

図-4. は若干の計算例と実験値を比較したものである。

参考文献

倉西正綱 著 弾性学
および応用弾性学

Biégeno u. Grammel ;

Technische Dynamik

S. Timoshenko ;

Theory of Plates

and Shells

機械学会 ;

機械工学便覧 (昭和12年版)

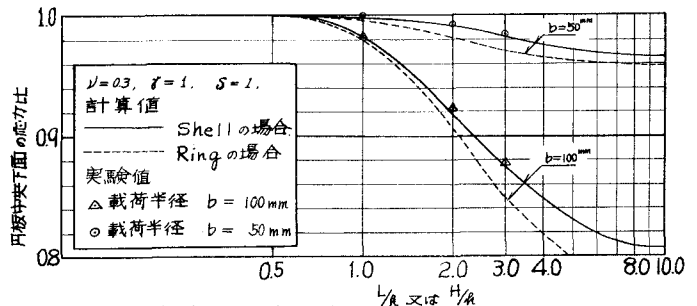


図-4. 計算例と実験値の比較.

注 $\nu = \frac{\nu_0}{1-\nu_0}$, $S = \frac{a}{h}$ 又は $\frac{a}{b}$, $a = 153 \text{ mm}$, $h = 8 \text{ mm}$