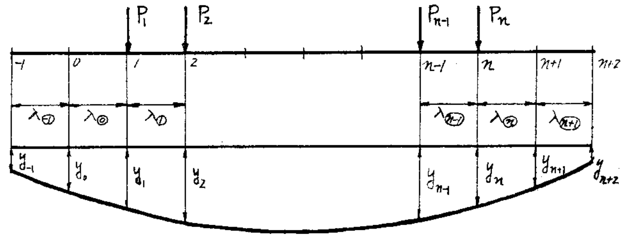
I—23 行列による梁および平板の解法

鉄道技術研究所　正員　大地羊三

§1 梁の解法



右図の各分割点で三連モーメントの定理を適用すると次の如くなる。

$$[\mathcal{L}]\begin{pmatrix}M_0\\ \vdots\\ M_{n+1}\end{pmatrix} = -\underset{n+2\ n+3}{[D]}\begin{bmatrix}\lambda_{(-1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{(n+1)}\end{bmatrix}^{-1}\underset{n+3\ n+4}{[D]}\begin{pmatrix}y_{-1}\\ \vdots\\ y_{n+2}\end{pmatrix}$$

又曲げモーメントと荷重との関係は

$$\underset{n\ n+1}{[D]}\begin{bmatrix}\lambda_{(0)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{(n)}\end{bmatrix}^{-1}\underset{n+1\ n+2}{[D]}\begin{pmatrix}M_0\\ \vdots\\ M_{n+1}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}P_1\\ \vdots\\ P_n\end{pmatrix}$$

で表はされる。この2式をまとめると次式が得られる。

$$\underset{n\ n+1}{[D]}\begin{bmatrix}\lambda_{(0)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{(n)}\end{bmatrix}^{-1}\underset{n+1\ n+2}{[D]}[\mathcal{L}]^{-1}\underset{n+2\ n+3}{[D]}\begin{bmatrix}\lambda_{(-1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{(n+1)}\end{bmatrix}^{-1}\underset{n+3\ n+4}{[D]}\begin{pmatrix}y_{-1}\\ \vdots\\ y_{n+2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P_1\\ \vdots\\ P_n\end{pmatrix} \cdots\cdots (1)$$

之に境界条件

$$[\alpha]\begin{pmatrix}\theta_{(-1)}\\ y_0\\ y_n\\ \theta_{(n+1)}\end{pmatrix} + [\beta]\begin{pmatrix}M_0\\ -Q_{(0)}\\ Q_{(n)}\\ -M_n\end{pmatrix} = (0) \cdots\cdots (2)$$

但
$$[\mathcal{L}] = \begin{bmatrix}2(\lambda'_{-1}+\lambda'_0) & \lambda'_0 & & & \\ \lambda'_0 & 2(\lambda'_0+\lambda'_1) & \lambda'_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda'_{n-1} & 2(\lambda'_{n-1}+\lambda'_n) & \lambda'_n \\ & & & \lambda'_n & 2(\lambda'_n+\lambda'_{n+1})\end{bmatrix} \ ; \quad \lambda'_i = \frac{\lambda_{(i)}}{6EI_{(i)}}$$

$\underset{i\ i+1}{[D]} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1\end{bmatrix}$ なる形の i 行 i+1 列の行列

$\begin{bmatrix}\lambda_{(0)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{(n)}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\lambda_{(-1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{(n+1)}\end{bmatrix}$ = $\lambda_{(0)}\cdots\lambda_{(n)}$, $\lambda_{(-1)}\cdots\lambda_{(n+1)}$ を対角線上に並べた対角行列

をつけ加えると完全な連立一次方程式が得られる。(1), (2) 式を変形すると次の如くなり

$$\overline{[B]}[\mathcal{L}]^{-1}[B]\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} + \overline{[B]}[\mathcal{L}]^{-1}[\lambda](X) = \begin{pmatrix}P_1\\ \vdots\\ P_n\end{pmatrix} \cdots\cdots (1)'$$

$$[\beta]\overline{[\lambda]}[\mathcal{L}]^{-1}[B]\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} + \left\{[\alpha]+[\beta]\overline{[\lambda]}[\mathcal{L}]^{-1}[\lambda]\right\}(X) = (0) \cdots\cdots (2)'$$

但
$\overline{[\ ]}$ = 行列 [ ] の転置行列

$$\overline{[B]} = \underset{n\ n+1}{[D]}\begin{bmatrix}\lambda_{(0)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{(n)}\end{bmatrix}^{-1}\underset{n+1\ n+2}{[D]} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_{(0)}} & -\left(\frac{1}{\lambda_{(0)}}+\frac{1}{\lambda_{(1)}}\right) & \frac{1}{\lambda_{(1)}} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_{(n-1)}} & -\left(\frac{1}{\lambda_{(n-1)}}+\frac{1}{\lambda_{(n)}}\right) & \frac{1}{\lambda_{(n)}}\end{bmatrix}$$

$$\overline{[\lambda]} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1/\lambda_{(0)} & 1/\lambda_{(0)} & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1/\lambda_{(n)} & -1/\lambda_{(n)}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$(X) = \begin{pmatrix}\theta_{(-1)}\\ y_0\\ y_n\\ \theta_{(n+1)}\end{pmatrix}$$

更に (X) を消却すると

$$\overline{[B]}\left\{[\mathcal{L}]^{-1} - [\mathcal{L}]^{-1}[\lambda]\left([\alpha]+[\beta]\overline{[\lambda]}[\mathcal{L}]^{-1}[\lambda]\right)^{-1}[\beta]\overline{[\lambda]}[\mathcal{L}]^{-1}\right\}[B]\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P_1\\ \vdots\\ P_n\end{pmatrix} \cdots\cdots (3)$$

となる。普通の梁では $[\alpha]$, $[\beta]$ は次の如く表はされるから

$$[\alpha] = [\varepsilon][\kappa]\overline{[\varepsilon]}, \quad [\beta] = [\varepsilon][\nu]\overline{[\varepsilon]} + [\varepsilon_\perp]\overline{[\varepsilon_\perp]}$$

($[\varepsilon]$ = 列ベクトルが単位ベクトルになっている行列
$[\varepsilon_\perp]$ = $[\varepsilon]$ の列ベクトルに直交するベクトルを列ベクトルとする行列)

之等を (3) 式に代入して整理すると最後に次式が得られる。

$$\overline{[B^*]}[\mathcal{L}^*]^{-1}[B^*]\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}P_1\\ \vdots\\ P_n\end{pmatrix} \cdots\cdots \left(但\ [\mathcal{L}^*] = \overline{[\lambda\varepsilon]}_\perp\left\{[\mathcal{L}]+[\lambda\varepsilon]\left[\frac{\nu}{\kappa}\right]\overline{[\lambda\varepsilon]}\right\}[\lambda\varepsilon]_\perp, \quad [B^*] = \overline{[\lambda\varepsilon]}_\perp[B]\right) \cdots\cdots (3)'$$

〔例　題〕

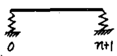
$$[B^*] = \begin{bmatrix}-1 & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_{(0)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{(n)}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & & \\ -1 & \ddots & \\ & \ddots & 1\\ & & -1\end{bmatrix}$$

, $[\mathcal{L}^*] = [\mathcal{L}_s] = [\mathcal{L}]$ の最初及び最後の行と列を取り去ったもの

$$[B^*] = \begin{bmatrix}-1 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_{(0)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{(n)}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & 1\\ & & -1\end{bmatrix}$$

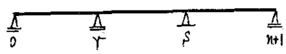
, $[\mathcal{L}^*] = [\mathcal{L}_c] = [\mathcal{L}]$ の最後の二つの行と列を取り去り, $\lambda'_{-1}=0$ としたもの

$$[B^*]=\begin{bmatrix}-1 & & \\ 1 & \ddots & -1 \\ & & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_{①} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{ⓝ}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & & \\ 1 & \ddots & -1 \\ & & 1\end{bmatrix}\quad,\quad [\mathcal{L}^*]\equiv[\mathcal{L}_F]=[\mathcal{L}]$$ で $\lambda_1=0$ とおいたもの



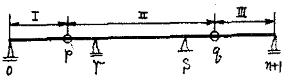
$$[B^*]=\begin{bmatrix}-1 & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & -1 \;\; 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_{①} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{ⓝ}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & & \\ 1 & \ddots & -1 \\ & & 1\end{bmatrix}\quad,\quad [\mathcal{L}^*]=[\mathcal{L}_S]+\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_{①}^2 k_0} & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots\;0 & \\ & & & \frac{1}{\lambda_{ⓝ}^2 k_{n+1}}\end{bmatrix}$$

（$k_0 \cdot k_{n+1}$ は夫々 0, $n+1$ 点のバネ常数）



$$[B^*]=\begin{bmatrix}-1 & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & -1\;\;1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_{①} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{ⓝ}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & & \\ 1 & \ddots & -1 \\ & & 1\end{bmatrix}_{r,s}\quad,\quad [\mathcal{L}^*]=[\mathcal{L}_S]$$

（右下のサフィックス r, s は r, s 列を取り去る事を意味するものとする。）



$$[B^*]=\begin{bmatrix}-1 & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & -1\;\;1\end{bmatrix}_{p,q}\begin{bmatrix}\lambda_{①} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{ⓝ}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & & \\ 1 & \ddots & -1 \\ & & 1\end{bmatrix}_{r,s}\quad,\quad [\mathcal{L}^*]=\begin{bmatrix}\mathcal{L}_{SI} & & \\ & \mathcal{L}_{SII} & \\ & & \mathcal{L}_{SIII}\end{bmatrix}$$

（左下のサフィックス p, q は p, q 行を取り去る事を意味するものとする。）

§2 平板の解法

直交異方性板を対象とし, $\kappa=H/\sqrt{B_xB_y}=1$ で斜交座標の場合の階差方程式（土木学会論文集第55号, 成岡博士の論文参照）を行列の形で書くと次の如くなる。

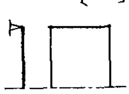
$$A\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & & 1 & 0\end{bmatrix}\boxed{W}\begin{bmatrix}1 & & \\ -2 & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & -2 \\ & & 1\end{bmatrix}+\frac{B}{2}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\boxed{W}\begin{bmatrix}-1 & & \\ 0 & \ddots & -1 \\ 1 & \ddots & 0 \\ & & 1\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\boxed{W}\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}=[U] \quad\text{-------------- (4)}$$

$$A\begin{bmatrix}0 & 1 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & & 1 & 0\end{bmatrix}\boxed{U}\begin{bmatrix}1 & & \\ -2 & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & -2 \\ & & 1\end{bmatrix}+\frac{B}{2}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\boxed{U}\begin{bmatrix}-1 & & \\ 0 & \ddots & -1 \\ 1 & \ddots & 0 \\ & & 1\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\boxed{U}\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}=[P] \quad\text{-------------- (5)}$$

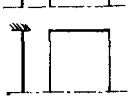
但し $\boxed{W}$, $\boxed{U}$ は$\overbrace{\text{周辺}}^{\text{の点}}$を含めた行列であり $[W]$, $[U]$ 等は周辺の点を除いた行列であるとする。
又 A, B, α は成岡博士の定義に従って $A=K^2(1+\alpha\tan^2\varphi)$, $B=K\alpha\tan\varphi$, $\alpha=\sqrt{B_y/B_x}$, $K=\lambda_y/\lambda_x$ とする。
問題を直交座標の場合に限ると $A=K^2$, $B=0$ となり, 更に境界条件を用いて (4), (5) 式を変形すると次式が得られる。

$$K^4[F][W][G]+2K^2\alpha[H][W][I]+\alpha^2[J][W][L]=[P] \quad\text{-------------- (6)}$$

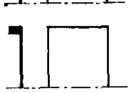
〔例　題〕



$$[F]=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix},\quad [H]=\begin{bmatrix}-2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix},\quad [J]=\begin{bmatrix}5 & -4 & 1 & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix}$$



$$[F]=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix},\quad [H]=\begin{bmatrix}-2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix},\quad [J]=\begin{bmatrix}7 & -4 & 1 & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix}$$



$$[F]=\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix}+\frac{2J'-(K^2-C)^2}{K^4}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots\;0\end{bmatrix},\quad [H]=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix}+\frac{C}{K^2}\begin{bmatrix}-2 & 1 & \\ 1/2 & 0 & \\ & & \ddots\;0\end{bmatrix},\quad [J]=\begin{bmatrix}2 & -4 & 2 & & \\ -2 & 5 & -4 & 1 & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots\end{bmatrix}$$

$J'=K^4E_bI_b/\lambda_yB_x$
$C=(1-\nu_x\alpha)K^2$

（$[G]$, $[I]$, $[L]$ は上と直角方向の境界条件によってきまる。）

附記 i) (3) 式に現われる $[\bar\alpha][\mathcal{L}]^{-1}[\beta]$ の形をした行列の逆行列は次の如くなる。

$$[\bar b\beta]^{-1}[\bar b]\left\{[\mathcal{L}]-[\mathcal{L}][\alpha_1]\left[\bar\beta_1\mathcal{L}\alpha_1\right]^{-1}[\bar\beta_1][\mathcal{L}]\right\}[a][\bar\alpha a]^{-1}$$

（但 $[a], [b]=[\bar a\alpha], [\bar b\beta]$ が正則行列となる行列
$[\alpha_1], [\beta_1]=[\alpha], [\beta]$ に直交する行列）

ii) (6) 式は直積行列を用いると次の如く計算に便利な形になる。

$$\left\{K^4[F]\dot\times[G]+2K^2\alpha[H]\dot\times[I]+\alpha^2[J]\dot\times[L]\right\}(W)=(P)$$

（但し (W), (P) は行列 $[W]$, $[P]$ の列ベクトルをたてに並べたベクトル）