I—20　異等方性地山内の坑道周辺応力状態について

熊本大学工学部　　正員　川本朓万

ここではポアッソン比が一定であるが，弾性係数が深さとともに変化するような地山内の円形坑道周辺応力分布をあつかっている。このような異等方性材料にたいする弾性の一般式及び光弾性学の適用については，すでにCurtis及びRichartの研究があるが，これらはいずれも地表面上に集中荷重をうける半無限体内の応力分布について検討したものであり，ここではそれらの方法を適用して深さとともに直線的に変化する弾性係数をもつ地山内の坑道応力について考察した。

いま問題を平面ヒズミの状態として考えると，異等方性材料にたいする弾性の一般式はつぎのようになる。直角座標を用いy軸方向を深さの増加する方向にとり，弾性係数Eがyのみの関数$E=f(y)$と考えると，$\dfrac{\partial E}{\partial x}=0$であるから結局適合條件式は応力の項で表わせばつぎのようになる。

$$\Delta(\sigma_x+\sigma_y)-2\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_x+\sigma_y)\frac{\partial \ln E}{\partial y}+\left(\sigma_x-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right)\left[\left(\frac{\partial \ln E}{\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 \ln E}{\partial y^2}\right] \tag{1}$$

またAiryの応力関数を用いて表わせば，

$$\left(\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}\right)-2\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial y^3}+\frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial y}\right)\frac{\partial \ln E}{\partial y}+\left\{\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right\}\left\{\left(\frac{\partial \ln E}{\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 \ln E}{\partial y^2}\right\} \tag{2}$$

ここにμは平面ヒズミ系のポアッソン比である。したがってこの場合のごとき異等方性弾性地山内の応力状態は境界條件を満足し，かつ(2)式を満すごとき応力関数ϕを求めれば，各成分応力は$\sigma_x=\partial^2\phi/\partial y^2$，$\sigma_y=\partial^2\phi/\partial x^2$，$\tau_{xy}=-\partial^2\phi/\partial x\partial y$で得られることになる。いま弾性係数$E$が簡単に深さ$y$の一次関数で与えられる場合を考え，

$$E=k(y+y_0)\qquad(y_0：常数) \tag{3}$$

とすると，(2)式はつぎのようになる。

$$\left(\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}\right)-\frac{2k}{E}\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial y^3}+\frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial y}\right)+\frac{2k^2}{E^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)=0 \tag{4}$$

坑道周辺における境界条件を満足するごとく(4)式の一般解を求めることは数学的に容易なことではない。したがってここでは近似的に深さの方向に等分布荷重をうける異等方性の有孔板を考え，(4)式を階差方程式に変形して適用することにより円形孔周辺の応力状態を求めた。(4)式を階差方程式で表わすとつぎのようになる。

$$\begin{aligned}&4(5-\alpha^2+\nu\alpha^2)\phi_0-2(4+\nu\alpha^2)\phi_1+2(-4-2\alpha+\alpha^2)\phi_2-2(4+\nu\alpha^2)\phi_3+\\&+2(-4-2\alpha+\alpha^2)\phi_4+(2+\alpha)\phi_5+(2+\alpha)\phi_6+(2-\alpha)\phi_7+(2-\alpha)\phi_8+\phi_9+\\&+(1+\alpha)\phi_{10}+\phi_{11}+(1-\alpha)\phi_{12}=0\end{aligned} \tag{5}$$

ここに　$\alpha=\dfrac{k}{E}h$　（h：坑道中心の深さ），　$\nu=\dfrac{\mu}{1-\mu}$

さらに坑道が地表面近傍の地山内にうがたれ，地表面上の載荷重によって影響される場合を考えると近似的につぎのごとく取扱うことができる。すなわちJ. Ohdeによると半無限非等質体において弾性係数が $E = k(y+y_0)^w$ で与えられる場合，Fröhlichの式 $\sigma_r = f \cdot p \cos^{n-2}\theta \cdot r^{-1}$ （こゝに $f = 1/\left(2\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}\theta d\theta\right)$ ）は

$$n = w + 3 = m + 1 = 1 + 1/\mu \qquad (n:\text{応力集中係数}) \qquad (6)$$

なる関係が成立するときに適合条件式(2)及び境界条件を満足することが明らかにされている。とくに弾性係数が深さとともに直線的に増加するような場合においては $w = 1$ であるから，$n = 4$，$\mu = 1/3$ なるときに相当する。したがって地山がこのような性質をもつと考えられるときには地表面上の等分布荷重による坑道の周辺応力状態においてはFröhlichの式が適用され，近似的に算定できる。

つぎにこのような非等方性材料中の応力分布の決定において光弾性学を適用すればつぎのようになる。すなわち変化する弾性係数を有する地山と，変化する厚さを有する板との間に物理的類似性のあることを考慮して，二次元問題として光弾性実験を行えば，与えられた境界荷重をうけ，その厚さ(h)が深さ(y)のみの関数であるような薄いスライスにおける適合条件式は応力の項でつぎのようになる。

$$\Delta(h\sigma_x + h\sigma_y) - 2\frac{\partial}{\partial y}(h\sigma_x + h\sigma_y)\frac{\partial \ln h}{\partial y} + (h\sigma_x - \mu' h\sigma_y)\left[\left(\frac{\partial \ln h}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \ln h}{\partial y^2}\right] = 0 \qquad (7)$$

ここで μ' は平面応力系のポアッソン比である。したがって(1)式と(7)式及び釣合方程式を比較することにより，二つの系はもし平面ヒズミ系 $[\sigma_{x,y,xy},\ E = E(y),\ \mu]$ が平面応力系 $[h\sigma_{x,y,xy},\ h = h(y),\ \mu' = \frac{\mu}{1-\mu}]$ と相対応するような関係にあるときは数学的に同一であることが判る。この関係を用いて光弾性実験によって得た結果（平面応力系の σ_x，σ_y，τ_{xy}）より本題のごとき非等方性地山内の坑道周辺応力状態を知りうる。

光弾性実験は等分布荷重をうける有孔板の円孔周辺応力と等分布荷重をうける地表面下の坑道周辺応力状態を求めるために行われ，計算結果と比較される。いま1例として前者の場合の光弾性縞写真を示せば写真1,2,3のようである。いずれも鉛直方向等分布荷重度は等しく，それぞれ深さ $h = 7r$，$6r$，$5r$ の場合であり，$h = 5r$ のときには弾性係数が一定な場合よりかなり相違するが，$h = 7r$ 以上になるとあまり変化がみられない。

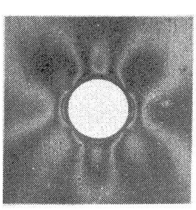

写真 1

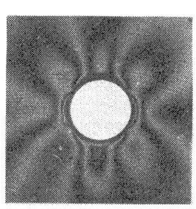

写真 2

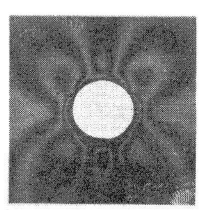

写真 3