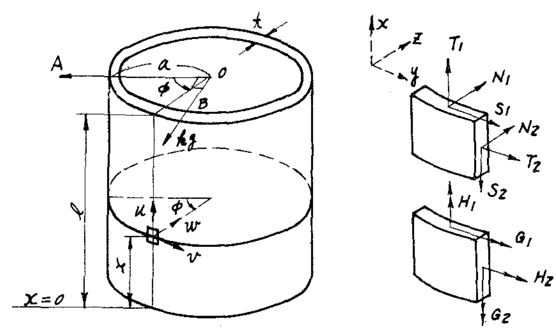
I—14 円筒殼水槽の耐震計算について

東京電力　正員 飯島延惠
〃　○正員 萩原敏雄

図の如き円筒殼水槽が充水時に水平震度kなる地震力を受けた場合，壁体に生ずる応力を求める一般解式を熟知の3元連立平衡方程式から誘導した。各方向の応力及び変位等をLove："Mathematical Theory of Elasticity"に記載の記号に従って次の如く表わす。



T，N，S　：合応力（巾単位長，厚さt）
H，G　　：合応力モーメント（〃　）
u，v，w　：変位
σ：ポアソン比，　$D=\dfrac{E\,t^3}{12(1-\sigma^2)}$

平衡方程式を求めるに当り、外力として動水圧[1]及び壁体の慣性力を採る。弾性理論により変位の基本形は　$u=U(x)\sin\phi$，$v=V(x)\cos\phi$，$w=W(x)\sin\phi$　により与えられる。壁体の一部の平衡を考え、且つ力と変形，変位と変形との関係を用いれば，次の如くU，V，Wで表わされる平衡方程式を得る。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{24D}{t^3}\left[\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{1-\sigma}{2a^2}U-\frac{1+\sigma}{2a}\frac{dV}{dx}-\frac{\sigma}{a}\frac{dW}{dx}\right]+\frac{2D}{t}\left[\frac{2-2\sigma-3\sigma^2}{2(1-\sigma)a}\frac{d^3W}{dx^3}\right]=0\\
&\frac{24D}{t^3}\left[\frac{1+\sigma}{2a}\frac{dU}{dx}-\frac{1}{a^2}(W+V)+\frac{1-\sigma}{2}\frac{d^2V}{dx^2}\right]+\frac{2D}{t}\left[\frac{3-5\sigma-\sigma^2}{2(1-\sigma)a^2}\frac{d^2W}{dx^2}+\frac{3(1-\sigma)}{2a^2}\frac{d^2V}{dx^2}\right]=-2gk\\
&\frac{24D}{t^3}\left[\frac{\sigma}{a}\frac{dU}{dx}-\frac{1}{a^2}(W+V)\right]-\frac{2D}{t}\left[\frac{d^4W}{dx^4}-\frac{4-5\sigma-2\sigma^2}{2(1-\sigma)a^2}\frac{d^2W}{dx^2}-\frac{2-\sigma}{a^2}\frac{d^2V}{dx^2}\right]=2gk+g_0k\frac{\sqrt{3}\ell}{t}\tanh\left(\frac{\sqrt{3}a}{\ell}\right)\cdot\left\{1-\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

ここに　g_0は液体の単位容積重量，gは壁体の単位容積重量を表わす。
(1)式を解くとU，V，Wは夫々次の形で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}
U=&\left(\frac{a}{\ell}\right)C_2+6\left(\frac{a}{\ell}\right)^3(2+\sigma)C_4+\frac{2a}{\ell^2}C_3x+\frac{3a}{\ell^3}C_4x^2-\frac{B}{60a\ell^2(1-\sigma^2)}x^5\\
&+e^{\alpha x}\left[(\beta C_5-\gamma C_6)\cos\alpha x+(\gamma C_5+\beta C_6)\sin\alpha x\right]+e^{-\alpha x}\left[(-\beta C_7-\gamma C_8)\cos\alpha x+(\gamma C_7-\beta C_8)\sin\alpha x\right]\\
V=&-C_1+2\left(\frac{a}{\ell}\right)^2\sigma C_3+\left(-\frac{1}{\ell}C_2+\frac{6a^2\sigma}{\ell^3}C_4\right)x-\frac{1}{\ell^2}C_3x^2-\frac{1}{\ell^3}C_4x^3+\frac{1}{24(1-\sigma^3)a^2}\left\{A+\frac{2(2+\sigma)a^2}{\ell^2}B\right\}x^4\\
&+e^{\alpha x}\left[(-\delta C_5-\zeta C_6)\cos\alpha x+(\zeta C_5-\delta C_6)\sin\alpha x\right]+e^{-\alpha x}\left[(-\delta C_7+\zeta C_8)\cos\alpha x+(-\zeta C_7-\delta C_8)\sin\alpha x\right]\\
W=&C_1+\frac{1}{\ell}C_2x+\frac{1}{\ell^2}C_3x^2+\frac{1}{\ell^3}C_4x^3-\frac{1}{24(1-\sigma^2)a^2}\left\{2A+\left(1+\frac{4a^2}{\ell^2}\right)B\right\}x^4+\frac{B}{360(1-\sigma^2)a^2\ell^2}x^6\\
&+e^{\alpha x}(C_5\cos\alpha x+C_6\sin\alpha x)+e^{-\alpha x}(C_7\cos\alpha x+C_8\sin\alpha x)
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha^4=\frac{3(1-\sigma^2)}{a^2t^2},\ \beta=\frac{\sigma}{2a\alpha}-\frac{1}{4a^3\alpha^3},\ \gamma=\frac{\sigma}{2a\alpha}+\frac{1}{4a^3\alpha^3},\ \delta=\frac{1+2\sigma}{4a^4\alpha^4},\ \zeta=\frac{2+\sigma}{2a^2\alpha^2}\\
&A=\frac{gkt^3}{12D}=\frac{g(1-\sigma^2)}{E}k,\ B=\frac{t^3}{24D}g_0k\frac{\sqrt{3}\ell}{t}\tanh\left(\frac{\sqrt{3}a}{\ell}\right)=\frac{g_0(1-\sigma^2)}{2E}\frac{\sqrt{3}\ell}{t}\tanh\left(\frac{\sqrt{3}a}{\ell}\right)\cdot k\\
&C_i\ (i=1,2,3,4,5,6,7,8)\ \text{は積分常数である。}
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

次に境界条件によって積分常数を決定する。

$$\left.\begin{aligned}
&x=0\ \text{において}\quad U=0,\ V=0,\ W=0\ \text{及び}\ \frac{d^2W}{dx^2}=0\ (\text{ヒンヂ})\ \text{或は}\ \frac{dW}{dx}=0\ (\text{固定})\\
&x=\ell\ \text{において}\\
&\frac{dU}{dx}-\frac{\sigma}{a}(W+V)=0,\ \frac{d^2W}{dx^2}-\frac{\sigma}{a^2}(W+V)=0,\ \frac{d^3W}{dx^3}-\frac{\sigma}{a^2}\left(\frac{dW}{dx}+\frac{dV}{dx}\right)=0,\ \frac{1}{a^2}\frac{dW}{dx}+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{a^2}\right)\frac{dV}{dx}+\frac{1}{h^2}\frac{U}{a}=0.
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

これら8ヶの條件式に(2)式を代入し，微小項を省略してこれを解くと次の如く積分常数が決定できる。尚、積分常数をnondimensionにするため $c_i=\dfrac{E}{k\ell^2 q_0}C_i$ を用いる。

$$\left.\begin{aligned}
e^{\alpha\ell}C_6&=\frac{1}{\mu w-\mu' w'}\Big[\Big\{\frac{q}{q_0}+\Big(\frac{1}{3}+\frac{2a^2}{\ell^2}\Big)K\Big\}(\mu\cos\alpha\ell+\mu'\sin\alpha\ell)-\frac{a}{\ell}\Big\{\Big(2+\frac{1-3\sigma}{12}\frac{\ell^2}{a^2}\Big)\frac{q}{q_0}+\Big(1+\frac{4a^2}{\ell^2}-\frac{\sigma}{6}+\frac{\sigma^2}{6}-\frac{1+17\sigma}{120}\frac{\ell^2}{a^2}\Big)K\Big\}(w'\cos\alpha\ell+w\sin\alpha\ell)\Big]\\
e^{\alpha\ell}C_5&=\frac{1}{\mu w-\mu' w'}\Big[\Big\{\frac{q}{q_0}+\Big(\frac{1}{3}+\frac{2a^2}{\ell^2}\Big)K\Big\}(\mu'\cos\alpha\ell-\mu\sin\alpha\ell)-\frac{a}{\ell}\Big\{\Big(2+\frac{1-3\sigma}{12}\frac{\ell^2}{a^2}\Big)\frac{q}{q_0}+\Big(1+\frac{4a^2}{\ell^2}-\frac{\sigma}{6}+\frac{\sigma^2}{6}-\frac{1+17\sigma}{120}\frac{\ell^2}{a^2}\Big)K\Big\}(w\cos\alpha\ell-w'\sin\alpha\ell)\Big]\\
C_4&=-\frac{1}{12(1+\sigma)}\Big(\frac{\ell}{a}\Big)^3\Big\{(\lambda_1\cos\alpha\ell-\lambda_1'\sin\alpha\ell)e^{\alpha\ell}C_5+(\lambda_1'\cos\alpha\ell+\lambda_1\sin\alpha\ell)e^{\alpha\ell}C_6\Big\}-\frac{\frac{q}{q_0}+\Big\{-\frac{1}{10}+\frac{2(2+\sigma)a^2}{\ell^2}\Big\}K}{72(1-\sigma^2)(1+\sigma)}\Big(\frac{\ell}{a}\Big)^4\\
C_3&=-3C_4-\frac{1}{2(1-\sigma^2)}\Big(\frac{\ell}{a}\Big)^2\Big\{(\psi\cos\alpha\ell-\psi'\sin\alpha\ell)e^{\alpha\ell}C_5+(\psi'\cos\alpha\ell+\psi\sin\alpha\ell)e^{\alpha\ell}C_6\Big\}+\frac{K}{24}\Big(\frac{\ell}{a}\Big)^2-\frac{\sigma\Big(\frac{q}{q_0}+\frac{14}{15}K\Big)}{48(1-\sigma^2)}\Big(\frac{\ell}{a}\Big)^4\\
&\text{底辺ヒンヂの場合,}\quad C_1=\Big\{2\Big(\frac{a}{\ell}\Big)^2\sigma+\frac{\zeta}{\ell^2\alpha^2}\Big\}C_3\ ,\quad C_7=-C_1-C_5\ ,\quad C_8=\frac{1}{\ell^2\alpha^2}C_3+C_6\\
C_2&=-6\Big(\frac{a}{\ell}\Big)^2(2+\sigma)C_4-\Big(\frac{\ell}{a}\Big)\beta(C_5-C_7)+\Big(\frac{\ell}{a}\Big)\gamma(C_6+C_8)\\
&\text{底辺固定の場合,}\quad C_8=\frac{1}{\zeta+\frac{a\alpha+\gamma}{a\alpha-\beta}}\Big\{-2\Big(\frac{a}{\ell}\Big)^2\sigma C_3+6\Big(\frac{a}{\ell}\Big)^3\frac{2+\sigma}{a\alpha-\beta}C_4-2C_5+\Big(\zeta-\frac{a\alpha+\gamma}{a\alpha-\beta}\Big)C_6\Big\}\\
C_7&=-2\Big(\frac{a}{\ell}\Big)^2\sigma C_3-C_5+\zeta(C_6-C_8)\ ,\quad C_1=-C_5-C_7\ ,\quad C_2=\ell\alpha(-C_5-C_6+C_7-C_8)
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{ただし}\quad &\psi=a\alpha(\beta+\gamma)-\sigma(1-\delta),\ \psi'=a\alpha(\beta-\gamma)+\sigma\zeta\ ;\ w=2a^2\alpha^2+\sigma\zeta\ ,\ w'=\sigma(1-\delta)\\
&\mu=2a^3\alpha^3-a\alpha(-1+\delta-\zeta),\ \mu'=2a^3\alpha^3-a\alpha(1-\delta-\zeta)\ ;\ \lambda_1=\frac{t^2}{4a^2}a\alpha+\beta-a\alpha\delta+a\alpha\zeta\ ,\\
&\lambda_1'=\frac{t^2}{4a^2}a\alpha-\gamma-a\alpha\delta-a\alpha\zeta\ ;\quad K=\frac{2}{3}\frac{a}{t}\frac{\tanh\sqrt{3}a/\ell}{\sqrt{3}a/\ell}
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

上記の諸式を応力と変位の関係式に代入すれば、次の如く主要な応力を求める一般解式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
G_1&=-D\Big[\frac{d^2W}{dx^2}-\frac{\sigma}{a^2}(W+V)\Big]\sin\phi\\
&=-\frac{t^3kq_0}{12(1-\sigma^2)}\Big[2(1-\sigma^2)C_3+6(1-\sigma^2)C_4\frac{x}{\ell}-\Big\{\frac{q}{q_0}+\Big(\frac{1}{2}+\frac{2a^2}{\ell^2}\Big)K\Big\}\frac{\ell^2}{a^2}\frac{x^2}{\ell^2}+\frac{1}{24}\Big\{\sigma\frac{q}{q_0}+\Big(\sigma+2\overline{1-\sigma}\frac{a^2}{\ell^2}\Big)K\Big\}\frac{\ell^4}{a^4}\frac{x^4}{\ell^4}-\frac{\sigma K\ell^4}{360a^4}\cdot\frac{x^6}{\ell^6}\\
&\quad+\frac{\ell^2}{a^2}e^{\alpha x}\{(-w'C_5+wC_6)\cos\alpha x+(-wC_5-w'C_6)\sin\alpha x\}+\frac{\ell^2}{a^2}e^{-\alpha x}\{(-w'C_7-wC_8)\cos\alpha x+(wC_7-w'C_8)\sin\alpha x\}\Big]\sin\phi\\
N_1&=-D\Big[\frac{d^3W}{dx^3}-\frac{1}{a^2}\Big(\frac{dW}{dx}+\frac{dV}{dx}\Big)\Big]\sin\phi\\
&=-\frac{t^3kq_0}{12(1-\sigma^2)\ell}\Big[6(1-\sigma)C_4-\Big\{\frac{2q}{q_0}+\Big(1+\frac{4a^2}{\ell^2}\Big)K\Big\}\frac{\ell^2}{a^2}\frac{x}{\ell}+\frac{1}{6}\Big\{\frac{q}{q_0}+\Big(1+\frac{2(1-\sigma)a^2}{\ell^2}\Big)K\Big\}\frac{\ell^4}{a^4}\frac{x^3}{\ell^3}-\frac{K\ell^4}{60a^4}\frac{x^5}{\ell^5}\\
&\quad+\frac{\ell^3}{a^3}e^{\alpha x}\{(-\mu C_5+\mu'C_6)\cos\alpha x+(-\mu'C_5-\mu C_6)\sin\alpha x\}+\frac{\ell^3}{a^3}e^{-\alpha x}\{(\mu C_7+\mu'C_8)\cos\alpha x+(-\mu'C_7+\mu C_8)\sin\alpha x\}\Big]\sin\phi\\
T_1&=\frac{12D}{t^2}\Big[\frac{dU}{dx}-\frac{\sigma}{a}(W+V)\Big]\sin\phi\\
&=\frac{tkq_0\ell}{(1-\sigma^2)}\Big[2(1-\sigma^2)\frac{a}{\ell}C_3+6(1-\sigma^2)\frac{a}{\ell}C_4\frac{x}{\ell}+\frac{1}{24}\Big\{\sigma\frac{q}{q_0}+\Big(\sigma-2\overline{1+\sigma^2}\frac{a^2}{\ell^2}\Big)K\Big\}\frac{\ell^3}{a^3}\frac{x^4}{\ell^4}-\frac{\sigma K\ell^3}{360a^3}\frac{x^6}{\ell^6}\\
&\quad+\frac{\ell}{a}e^{\alpha x}\{(\psi C_5+\psi'C_6)\cos\alpha x+(-\psi'C_5+\psi C_6)\sin\alpha x\}+\frac{\ell}{a}e^{-\alpha x}\{(\psi C_7-\psi'C_8)\cos\alpha x+(\psi'C_7+\psi C_8)\sin\alpha x\}\Big]\sin\phi\\
S_1&=\frac{2D(1-\sigma)}{t^2}\Big[3\Big(\frac{dU}{dx}+\frac{U}{a}\Big)-\frac{t^2}{4a^2}\Big(\frac{dW}{dx}+\frac{dV}{dx}\Big)\Big]\cos\phi\\
&=\frac{tkq_0\ell}{6(1+\sigma)}\Big[36(1+\sigma)\frac{a^2}{\ell^2}C_4+\Big\{\frac{2q}{q_0}+\frac{(2+\sigma)a^2}{\ell^2}K\Big\}\frac{\ell^2}{a^2}\frac{x^3}{\ell^3}-\frac{K\ell^2}{20a^2}\frac{x^5}{\ell^5}\\
&\quad+\frac{\ell}{a}e^{\alpha x}\{(-\lambda_2'C_5-\lambda_2C_6)\cos\alpha x+(\lambda_2C_5-\lambda_2'C_6)\sin\alpha x\}+\frac{\ell}{a}e^{-\alpha x}\{(\lambda_2'C_7-\lambda_2C_8)\cos\alpha x+(\lambda_2C_7+\lambda_2'C_8)\sin\alpha x\}\Big]\cos\phi
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

ただし　$\lambda_2=\dfrac{t^2}{4a^2}a\alpha+3(\gamma+a\alpha\delta+a\alpha\zeta)$ ， $\lambda_2'=\dfrac{t^2}{4a^2}a\alpha-3(\beta-a\alpha\delta+a\alpha\zeta)$ -------- (8)

單位面積に対する応力を直接求めるため $\sigma_{G_1}=\dfrac{6}{t^2}G_1$ ， $\sigma_{T_1'}=\dfrac{T_1'}{t}$ ， $\tau_{N_1}=\dfrac{N_1}{t}$ ， $\tau_{S_1'}=\dfrac{S_1'}{t}$ なる関係を用いれば， $\sigma_{G_1}=kq_0\ell\,g_1(x)\cdot\sin\phi$ ， $\sigma_{T_1'}=kq_0\ell\,t_1'(x)\cdot\sin\phi$ ， $\tau_{N_1}=kq_0\ell\,n_1(x)\sin\phi$ ， $\tau_{S_1'}=kq_0\ell\,s_1(x)\cos\phi$ と表わせる。從って $g_1(x)$ ， $t_1'(x)$ ， $n_1(x)$ ， $s_1'(x)$ なるnondimensionの函数を， $\dfrac{\ell}{a}$ 及び $a\alpha$ をparameterとして各 $\dfrac{t}{a}$ 値に対し計算し、グラフにしておけば簡單に応力が求められる。

参考文献　1) G. W. Housner : "Earthquake Pressure on Fluid Containers" Calif. Inst. of Tech. Aug. 1954

2) 酒井忠明 : 「中空円筒殻体の強制振動による応力の一般解式及び実用解式」 土木学会論文集 18号, P58～