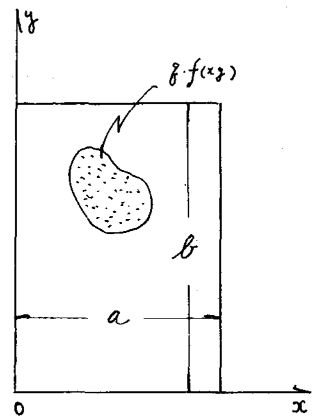
V—12 コンクリート鋪装板の模型実験における相似法則

室蘭工業大学土木　正員　能町純雄

普通の矩形板の曲げは，境界条件が同じであれば，同一の撓みの式で，板の形と荷重の載荷状態が相似な場合を全部示すことができる。しかしながら矩形板が弾性基礎上にあって曲げを受ける場合では，そのように簡単ではない。この場合には境界条件と，板の辺比と荷重載荷状態が等しい上に更に板の辺長（a 又は b）と板の曲げ剛度と基礎係数の間に一定の関係が存在する時に限り，両方の曲げの間に相似関係が生じてくる。鋪装コンクリートスラブの設計計算は，弾性基礎上の板の曲げ理論によるのが適当と考えられる，従って この理論に関する相似法則を明かにすれば，模型実験による応力測定の可能性が明かとなる。

1，あるデメンジヨンのない係数について

水の場合と異って，曲げの基本微分方程式に関与する要素が少くないから Π 理論によらずとも簡単に相似性を定る係数を求めることができる。



今 w を板のタワミ，　$N=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ を板の曲げ剛度，E は板の弾性係数，　h は板の厚さ，　ν をポアソン比，　a，b をそれぞれ板の辺長，　K を基礎係数とすれば，　弾性基礎上の板の平衡の微分方程式は

$$(1)\qquad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{K}{N}w=\frac{\gamma}{N}f(xy)$$

但し γ は単位面積あたりの荷重強度，$f(xy)$ は荷重の分布函数。

次に　$x=\xi a$，　$y=\eta b$　とおいて　x，y に対する変域 $(0.a)$，$(0.b)$ を (0.1)，(0.1) なる unit に変換し且つ ζ なる no dimension の函数を導入して，　$w=\frac{\gamma b^4}{N}\zeta$

と(1)式に代入すれば

$$(2)\qquad \frac{1}{a^4}\frac{\partial^4\zeta}{\partial\xi^4}+2\frac{1}{a^2b^2}\frac{\partial^4\zeta}{\partial\xi^2\partial\eta^2}+\frac{1}{b^4}\frac{\partial^4\zeta}{\partial\eta^4}+\frac{K}{N}\zeta=\frac{f(xy)}{b^4}$$

故に

$$(3)\qquad \frac{\partial^4\zeta}{\partial\xi^4}+2\alpha^2\frac{\partial^4\zeta}{\partial\xi^2\partial\eta^2}+\alpha^4\frac{\partial^4\zeta}{\partial\eta^4}+\frac{a^4K}{N}\zeta=\alpha^4 f(xy)$$

但し　$\alpha=\frac{a}{b}$，

更に曲げモーメントは，

$$
(4)\quad
\begin{cases}
M_x = g b^2 \left(\alpha^2 \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + \nu \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} \right) & \text{x方向曲げモーメント} \\[2ex]
M_y = g b^2 \left(\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} + \nu \alpha^2 \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} \right) & \text{y方向曲げモーメント} \\[2ex]
M_{xy} = g b^2 \alpha \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} & \text{捩りモーメント}
\end{cases}
$$

曲げに対する表面歪は

$$
(5)\quad
\begin{cases}
\dfrac{h}{2} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \alpha^2 \dfrac{h}{2} \dfrac{g b^2}{N} \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} = \dfrac{6(1-\nu^2) g a^2}{E h^2} \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} & \text{x方向歪み} \\[2ex]
\dfrac{h}{2} \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \dfrac{h}{2} \dfrac{g b^2}{N} \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} = \dfrac{6(1-\nu^2) g b^2}{E h^2} \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} & \text{y方向歪み} \\[2ex]
\dfrac{h}{2} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \alpha \dfrac{h}{2} \dfrac{g b^2}{N} \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} = \dfrac{6(1-\nu^2) g a b}{E h^2} \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} & \text{捩れによる歪み}
\end{cases}
$$

さて(3)式の微分方程式を周辺及び四隅において完全に自由という境界条件によつて解けば

$$
(6)\qquad \zeta = \phi\left(\alpha,\ \frac{a^4 K}{N},\ f(x,y) \right)
$$

なる形にかくことができる。上式中，α，$\frac{a^4K}{N}$，$f(x,y)$ が同一ならば ζ は一つの函数に固定する。α は板の形状に関するものであり，$f(x,y)$ は荷重状態に関するものであり，$\frac{a^4K}{N}$ は方程式を定めるある係数でレーノルス数の如きものである。

$$
\frac{a^4 K}{N} = \frac{12 a^4 K (1-\nu^2)}{E h^3}
$$

の関係があるから，a，K，h，$\frac{1-\nu^2}{E}$ を適宜組合せて一定となるようにして，縮小模型によつて曲げを測定し実際の応力が求められる。

2，相似比について

上の條件を満足する二つの板の間で添字1，2によつてこれを分ければ

(a) タワミに対する比

分布荷重 $\dfrac{g_1 b_1^4}{N_1} \Big/ \dfrac{g_2 b_2^4}{N_2}$；　点荷重 $\dfrac{Q_1 b_1^2}{N_1} \Big/ \dfrac{Q_2 b_2^2}{N_2}$；

(b) 曲げモーメントに対する比

分布荷重 $g_1 b_1^2 / g_2 b_2^2$；　点荷重 Q_1 / Q_2

(c) 曲げ歪みに対する比

分布荷重 $\dfrac{g_1 b_1^2 (1-\nu_1^2)}{E_1 h_1^2} \Big/ \dfrac{g_2 b_2^2 (1-\nu_1^2)}{E_2 h_2^2}$

点荷重 $\dfrac{Q_1 (1-\nu_1^2)}{E_1 h_1^2} \Big/ \dfrac{Q_2 (1-\nu_2^2)}{E_2 h_2^2}$

となる。本研究は昭和32年度文部省総合研究によるものゝ一部である。