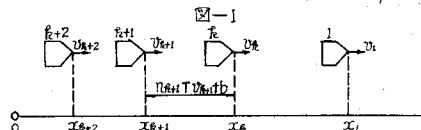


熊本大学 准員 佐佐木 綱

交通流の理論は大きく分けて3つの型に分類できる。才1は random flow を対象とした確率論的接近であり、才2は Richards 氏による流体力学的接近、才3は L.A. Pipes 氏によくなされた1連の交通流に対する力学的接近である。本文は Pipes 氏の交通動学の基礎式を吟味することにより更に突如に通じた交通流の運動方程式を提示し、サイクリング現象とあわせて交通流の安定性について論ずる。

1. 交通流の運動方程式の導出 図1に示すように何台かの車両が連続して1列に走っている状態を交通流のモデルとする。各車の運転手はそれぞれ自己の先行車に追突しないような安全車頭間隔で走っているはずである。しかしながらその車頭間隔は運転手の経験から生まれたものであり、本当に安全な車頭間隔であるという保証はないのである(このため追突事故が発生しているのである)。以下簡単のため車頭間隔が後続車の速度の1次式で表わされるものと仮定する。図1に示すように各車が1列に右向きに走行している場合を考え、ある時間 t における先頭車から k 番目の車の座標及び速度を $x_k(t)$, $v_k(t)$, 運転手の反応時間を T とする。 $k+1$ 番目の車の時間 t における速度 $v_{k+1}(t)$ はその車の運転手が反応時間 T だけ以前における先行車との車頭間隔 $x_k(t-T) - x_{k+1}(t-T)$ に反応した結果得られたものである。なぜなら先行車の運動変化に対応するのに最小限反応時間 T だけの遅れを生ずるからである。従って車頭間隔を v_{k+1} の1次式 $nTv_{k+1} + b$ と仮定すれば次式が成立する。



$$x_k(t-T) - x_{k+1}(t-T) = nTv_{k+1}(t) + b \quad k=1,2,3,\dots \quad (1)$$

ここに T は運転手の反応時間, n , b は常数である。式(1)を t について微分すると

$$v_k(t-T) - v_{k+1}(t-T) = nTv_{k+1}(t) \quad k=1,2,3,\dots \quad (2)$$

が得られる。式(2)が交通流の運動方程式である。

2. 交通流の運動 式(2)のラプラス変換をとり整理すると次式が得られる。

$$V_{k+1}(s) = \frac{e^{-Ts}}{nTs + e^{-Ts}} V_k(s) + \frac{T v_{k+1}(0)}{nTs + e^{-Ts}} \quad k=1,2,3,\dots \quad (3)$$

ここに $V_k(s) = \int_0^\infty v_k(t) e^{-Ts} dt$, $k=1,2,3,\dots$ である。式(3)により先頭車の運動が与えられたときの後続車の追従運動を求めることができる。いますべての車が最初停止していて先頭車が衝撃的加速をもって一定速度 v_0 で走りだしたときの後続車群の運動を求めてやる。以下このような階段状の入力に対する後続車の追従運動を自動制御の用語にならうと過渡応答とよぶ。この場合の初期条件は $v_1(0) = v_0$, $v_{k+1}(0) = 0$ ($k=1,2,3,\dots$) であるから $V_1(s) = v_0/s$ が成立し式(3)を繰返し用いることにより $k+1$ 番目の車の応答は

$$V_{k+1}(s) = \left[\frac{e^{-Ts}}{nTs + e^{-Ts}} \right]^k \frac{v_0}{s} \quad (4)$$

と与えられる。式(4)の逆変換を求めるために式(4)を power series に展開すると

$$V_{k+1}(s) = \frac{v_0 \exp(-kTs) / n^k T^k s^{k+1}}{[1 + \exp(-Ts) / nTs]^k} = \frac{v_0 \exp(-kTs)}{(nT)^k s^{k+1}} - \frac{v_0 k \exp[-(k+1)Ts]}{(nT)^{k+1} s^{k+2}} + \dots$$

従って $k+1$ 番目の車の過渡応答は

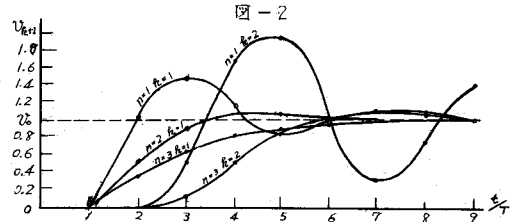
$$\begin{aligned} v_{k+1}(t)/v_0 &= \frac{(t-kT)^k}{(nT)^k k!} - \frac{k[t-(k+1)T]^{k-1}}{(nT)^{k+1} (k+1)!} + \frac{k(k+1)[t-(k+2)T]^{k-2}}{2(nT)^{k+2} (k+2)!} - \dots \\ &= \frac{1}{n^k (k-1)!} \left[\left(\frac{t}{T} - k\right)^k / k - \left(\frac{t}{T} - k - 1\right)^{k+1} / (k+1) + \left(\frac{t}{T} - k - 2\right)^{k+2} / 2n^2 (k+2) - \dots \right] \quad (5) \end{aligned}$$

式(5)から $k=1, 2$ に対する過渡応答として次式をうる。

$$\begin{aligned} v_2(t)/v_0 &= \frac{1}{n} \left(\frac{t}{T} - 1\right) - \frac{1}{2n^2} \left(\frac{t}{T} - 2\right)^2 + \frac{1}{6n^3} \left(\frac{t}{T} - 3\right)^3 - \frac{1}{24n^4} \left(\frac{t}{T} - 4\right)^4 + \frac{1}{120n^5} \left(\frac{t}{T} - 5\right)^5 - \dots \\ v_3(t)/v_0 &= \frac{1}{2n^2} \left(\frac{t}{T} - 2\right)^2 - \frac{1}{3n^3} \left(\frac{t}{T} - 3\right)^3 + \frac{1}{8n^4} \left(\frac{t}{T} - 4\right)^4 - \frac{1}{30n^5} \left(\frac{t}{T} - 5\right)^5 + \frac{1}{144n^6} \left(\frac{t}{T} - 6\right)^6 - \dots \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)から過渡応答を計算し図示すると図2のとおりである。図2に示すように後続車の運動は kT だけの dead time を必要とし n が小さい場合振動(サイクリング)を伴うものである。このサイクリングは時間と共に減衰していくのが普通である。

次に一定速度 v_0 で走っている一連の交通流の先頭車が衝撃的に急停止した場合の後続車の過渡応答について考察してみる。初期条件は $v_1 = 0$, $v_{k+1}(0) = v_0$ ($k=1, 2, \dots$) であるから式(3)において $V_1(s) = 0$ とする。



次に一定速度 v_0 で走っている一連の交通流の先頭車が衝撃的に急停止した場合の後続車の過渡応答について考察してみる。初期条件は $v_1 = 0$, $v_{k+1}(0) = v_0$ ($k=1, 2, \dots$) であるから式(3)において $V_1(s) = 0$ とする。

$$\begin{aligned} V_2(s) &= \frac{nTv_0}{nTs + e^{-Ts}}, \quad V_3(s) = \frac{nTv_0 e^{-Ts}}{(nTs + e^{-Ts})^2} + \frac{nTv_0}{nTs + e^{-Ts}} \\ V_{k+1}(s) &= \frac{nTv_0 e^{-(k-1)Ts}}{(nTs + e^{-Ts})^k} + \frac{nTv_0 e^{-(k-2)Ts}}{(nTs + e^{-Ts})^{k-1}} + \dots + \frac{nTv_0}{nTs + e^{-Ts}} \end{aligned} \quad (7)$$

が得られる。従って式(7)を逆変換すると過渡応答が得られる。

$$\begin{aligned} v_2(t)/v_0 &= 1 - \frac{1}{n} \left(\frac{t}{T} - 1\right) + \frac{1}{2n^2} \left(\frac{t}{T} - 2\right)^2 - \frac{1}{6n^3} \left(\frac{t}{T} - 3\right)^3 + \frac{1}{24n^4} \left(\frac{t}{T} - 4\right)^4 - \dots \\ v_3(t)/v_0 &= 1 - \frac{1}{2n^2} \left(\frac{t}{T} - 2\right)^2 + \frac{1}{3n^3} \left(\frac{t}{T} - 3\right)^3 - \frac{1}{8n^4} \left(\frac{t}{T} - 4\right)^4 + \frac{1}{30n^5} \left(\frac{t}{T} - 5\right)^5 - \dots \end{aligned} \quad (8)$$

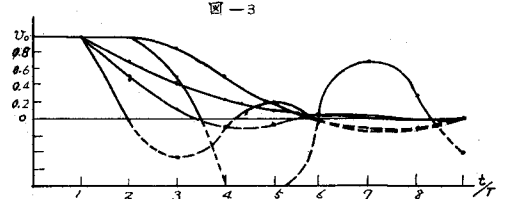
式(6), 式(8)の v を v_{start} , v_{stop} と区別すると次の関係式が成立することになる。

$$v_{2,start}(t) + v_{2,stop}(t) = v_0, \quad v_{3,start}(t) + v_{3,stop}(t) = v_0 \quad (9)$$

一般に数学的帰納法を用いて次式を証明することができる。

$$v_{k+1,start}(t) + v_{k+1,stop}(t) = v_0 \quad (10)$$

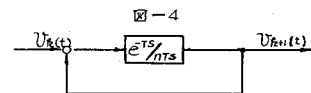
従って交通流の過渡応答は v_{start} , v_{stop} のいずれかから求めることができる。減速時の過渡応答は図3に示すとおりである。速度が負になることはないから過渡応答は図3の実線が表わされる。



3. 交通流の安定性 交通流が安定であるという場合は前節で考察した過渡応答が時間の経過と共に先頭車の速度に収斂することを意味し不安定であるという場合は過渡応答のサイクリングが永久に持続されることを意味するものと定義する。式(3)の伝達関数は式(11)に変形することになる。

$$G(s) = \frac{e^{-Ts}}{nTs + e^{-Ts}} = \frac{e^{-Ts/nTs}}{1 + e^{-Ts/nTs}} \quad (11)$$

ブロックダイアグラムに表わすと図4のような直結フィードバック系を構成している。過渡応答を実際に



求める方法としては前節でなされたように power series method によるのが最も能率的であるが、安定問題について考察するには特性根による方法が適切である。式(11)の特性式 $1 + e^{-Ts}/nTs = 0$ の根は $S_i = -\alpha_i + j\omega_i$ ($i=1, 2, \dots$) なる形と仮定して式(12)から求めることができる。

$$\alpha_i = \omega_i / \tan T\omega_i, \quad \omega_i = \pm \sqrt{e^{2T\alpha_i} / n^2 T^2 - \alpha_i^2} \quad (12)$$

いま先行車を k スタートしたときの後続車 $k+1$ の過渡応答は式(4)と同様

$$v_{k+1}(t) = \mathcal{L}^{-1} v_0 e^{-Ts} / s(nTs + e^{-Ts}) \quad (13)$$

で表わされる。しかし分子 $p(s) = e^{-Ts}$, 分母 $q(s) = s(nTs + e^{-Ts})$ とし $s=0$, $s=S_i$ において解析的であり, $s=0$ における留数は 1, 単極 S_i における留数は $p(S_i)e^{S_i t} / q'(S_i) = [-1/(1+TS_i)]e^{S_i t}$ であるので

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{p(s)}{q(s)} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p(S_i)}{q'(S_i)} e^{S_i t}$$

と表わせる。従って式(13)が成立する。

$$v_{k+1}(t) = v_0 \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{1+TS_i} \right) e^{S_i t} \right] \quad (14)$$

ゆえに一对の複素根 $S_{i,2} = -\alpha_i \pm j\omega_i$ に対しては $R_i = -1/(1+TS_{i,1})$ と表わす

$$v_{k+1}(t) = v_0 \left[1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} |R_i| e^{-\alpha_i t} \cos(\omega_i t + \angle R_i) \right] \quad (15)$$

が成立する。特性根のうち最も虚軸に近い根を S_1 とすると過渡応答式(15)はほとんどこの根による振動成分式(16)で代表される。

$$v_{k+1}(t) = v_0 \left[1 + 2|R_1| e^{-\alpha_1 t} \cos(\omega_1 t + \angle R_1) \right] \quad (16)$$

式(15), 式(16)からわかるように過渡応答が安定であるためには特性根の実数部が負でなければならぬ。安定限界は $\alpha_i = 0$ ($i=1, 2, \dots$) であるから式(12)より

$$1/nT \tan(\pm \frac{1}{n}) = 0 \quad \text{すなわち} \quad n = 2/\pi \quad (17)$$

を得る。また一方サイクリングを生じない条件は $\omega_i \leq 0$ であるから式(12)から $\alpha_i = \lim_{\omega_i \rightarrow 0} \omega_i / \tan T\omega_i = 1/T$ を用いて

$$n \geq e \quad (18)$$

を得る。従って次の定理を導くことができる。

定理 車頭間隔が後続車の速度のみの 1 次式で表わされるとき, その交通流は $n \leq 2/\pi$ ならば不安定, $2/\pi < n < e$ ならば安定でサイクリングを伴ない, $n \geq e$ のとき安定でサイクリングを発生しない。

また安定でサイクリングを伴う時の平面上の特性根の虚軸に近いほど安定度は失われていくから次式によつて安定度を評価できるであろう。

$$\theta = \alpha_i / \sqrt{\alpha_i^2 + \omega_i^2} \quad (19)$$

$n = 2/\pi$ のとき $\theta = 0$, $n = e$ のとき $\theta = 1$ となる。