IV—18 連續格子桁の理論と実験

大阪大学 正員 安宅 勝
○准員 波田凱夫

§1. 概説

単純梁に於ても、連続梁に於ても、横桁が一本だけの時は、分配荷重Xは、その垂直変位δに比例するが、横桁が数本ある時には、そうではない。この場合にはLeonhardtのいわゆるAffinlasten(相似荷重群)の考えを用いて、格子桁上の荷重を、相似荷重群の和として表示すれば、Xはδに比例するから、一本横桁の場合と同様に解くことができる。この相似荷重群は、横桁の数と同じだけあり、且つ各々の間には直交性が満足されている。かゝる直交函数系列を見出すことが本研究の主眼であつて，従来，実用計算的には殆ど不可能とされていた連続格子桁の解を，階差方程式の應用によつて比較的容易に見出すことができた。以下、その理論の概要を簡単に紹介するが，紙面の都合で，詳細な計算例と，実験結果は記載することができないので，講演会に於て詳述するつもりである。

§2. 二径間連續梁の相似荷重群

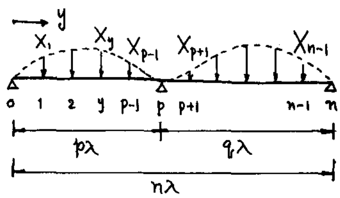

Fig.1

Fig.1 に於て

$$\delta_y = X_y\cdot\frac{\lambda^3}{6EJ\cdot\gamma}$$

となる如き荷重系列 $X_y=\varphi(y)$ を求める。

三連モーメントの定理から，

$$\frac{M_{y-1}}{\lambda}+4\frac{M_y}{\lambda}+\frac{M_{y+1}}{\lambda}=-\frac{1}{\gamma}(X_{y-1}-2X_y+X_{y+1}) \quad \text{------------ 1)}$$

別に

$$\frac{M_{y-1}}{\lambda}-2\frac{M_y}{\lambda}+\frac{M_{y+1}}{\lambda}=-X_y \quad \text{------------ 2)}$$

1), 2) より

$$\frac{M_y}{\lambda}=-\frac{1}{6\gamma}(X_{y-1}-2X_y+X_{y+1})+\frac{X_y}{6} \quad \text{------------ 3)}$$

3) を 1) に入れ

$$X_{y-2}-(4+\gamma)X_{y-1}+(6-4\gamma)X_y-(4+\gamma)X_{y+1}+X_{y+2}=0 \quad \text{---------------- 4)}$$

4) の解として，

$0\leqq y\leqq p$ に対し

$$(X_y)_1=C_1\left\{\sin p\beta\cdot\frac{\sinh\alpha y}{\sinh p\alpha}-\sin\beta y\right\} \quad \text{-------------------- 5)}$$

$p\leqq y\leqq n$ に対し

$$(X_y)_2=C_2\left\{\sin q\beta\cdot\frac{\sinh(n-y)\alpha}{\sinh q\alpha}-\sin\beta(n-y)\right\} \quad \text{---------------- 6)}$$

こゝに

$$\cosh\alpha=\frac{4+\gamma+\sqrt{24\gamma+\gamma^2}}{4},\quad \cos\beta=\frac{4+\gamma-\sqrt{24\gamma+\gamma^2}}{4}\quad (\text{但 } \gamma\leqq 8) \quad \text{---------- 7)}$$

とると，これらは，夫々 $X_0=0$, $(X_p)_1=0$, $M_0=0$ 及び $X_n=0$, $(X_p)_2=0$, $M_n=0$ なる境界條件を満足しているが，更に，$(M_p)_1=(M_p)_2$ 及び $(i_p)_1=(i_p)_2$ なる條件が残つている。(iは勾配)

そこで先ず $(i_p)_1=(i_p)_2$ に着目すると，Fig.2 から，

$$i_p=\left\{\frac{\delta_{p-1}}{\lambda}+\frac{\lambda^2}{6EJ}\left(2\frac{M_p}{\lambda}+\frac{M_{p-1}}{\lambda}\right)\right\}_1=-\left\{\frac{\delta_{p+1}}{\lambda}+\frac{\lambda^2}{6EJ}\left(2\frac{M_p}{\lambda}+\frac{M_{p+1}}{\lambda}\right)\right\}_2 \quad \text{--- 8)}$$

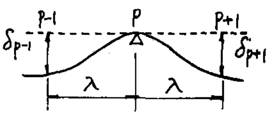

Fig.2

こゝで $\delta=X\lambda^3/6EJ\cdot\gamma$ 及び 3) を考慮し，更に $\delta_p=0$, 即ち $X_p=0$ とおいて，

結局，$(i_p)_1=(i_p)_2$ に関しては，

$$\{X_{p-2}-(6+\gamma)X_{p-1}+2X_{p+1}\}_1+\{2X_{p-1}-(6+\gamma)X_{p+1}+X_{p+2}\}_2=0 \quad \text{-------------} \quad 9)$$

を得る。一方 $(M_p)_1=(M_p)_2$ に関しては 3) から直ちに，

$$(X_{p-1}-2X_p+X_{p+1})_1=(X_{p-1}-2X_p+X_{p+1})_2 \quad \text{-------------} \quad 10)$$

これ等二つの条件に対應して，

$$\begin{cases} C_1\sin p\beta - C_2\sin q\beta = 0 & \text{-----------} \ 11) \\ C_1\left(\dfrac{\sin p\beta}{\sinh p\alpha}\cdot E\sinh p\alpha - E\sin p\beta\right) - C_2\left(\dfrac{\sin q\beta}{\sinh q\alpha}\cdot E\sinh q\alpha - E\sin q\beta\right)=0 & \text{-----------} \ 12) \end{cases}$$

但し，$E\sinh p\alpha = \sinh(p-2)\alpha-(6+\gamma)\sinh(p-1)\alpha+2\sinh(p+1)\alpha$

$E\sin p\beta = \sin(p-2)\beta-(6+\gamma)\sin(p-1)\beta+2\sin(p+1)\beta$ etc.

11), 12) の C_1, C の係数が作る行列式を 0 とおいて γ の固有値を求める。$\sin p\beta$ と $\sin q\beta$ が同時に 0 とならぬ場合は，$D=f(\gamma)=0$ とおいて

$$f(\gamma)=\left(\frac{E\sinh p\alpha}{\sinh p\alpha}+\frac{E\sinh q\alpha}{\sinh q\alpha}\right)-\left(\frac{E\sin p\beta}{\sin p\beta}+\frac{E\sin q\beta}{\sin q\beta}\right)=0 \quad \text{-------------} \quad 13)$$

又，$\sin p\beta$, $\sin q\beta$ が同時に 0 になる場合も，$D=0$ となり，この時の γ も固有値であり，結局，固有値は横桁の数だけ存在し，従ってそれに対應する固有函数群も，これと同数存在する。従ってかゝる γ の特定値に対し，$C_1=1$，$C_2=\sin p\beta/\sin q\beta$ として，

$$\left.\begin{array}{ll} 0\leqq y\leqq p \text{ に対し，} & \varphi_r(y)=\dfrac{\sin p\beta_r \sinh\alpha_r y}{\sinh p\alpha_r}-\sin\beta_r y \\ p\leqq y\leqq n \text{ に対し，} & \varphi_r(y)=\dfrac{\sin p\beta_r\sinh(n-y)\alpha_r}{\sinh q\alpha_r}-\sin\beta_r(n-y) \end{array}\right\} \quad \text{--------} \quad 14)$$

§3. 三径間連續梁の相似荷重群

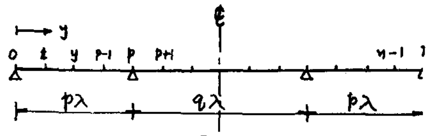
Fig. 3

三径間連續の場合は，荷重を対称と逆対称の場合に分けて考える。逆対称の場合は，二径間の場合の相似荷重群をそのまゝ使えばよく，対称の場合は，二径間の時の計算に準じて行い得る。前節と同様の手順から，相似荷重群を次の如く得る。

$$f(\gamma)=\left\{\frac{E\sinh p\alpha}{\sinh p\alpha}+\frac{E\cosh\left(\frac{n}{2}-p\right)\alpha}{\cosh\left(\frac{n}{2}-p\right)\alpha}\right\}-\left\{\frac{E\sin p\beta}{\sin p\beta}+\frac{E\cos\left(\frac{n}{2}-p\right)\beta}{\cos\left(\frac{n}{2}-p\right)\beta}\right\}=0 \quad \text{-------------} \quad 15)$$

より，γ の固有値を求め，これに対應する固有直交函数系列として次式を得る。

$$\left.\begin{array}{ll} 0\leqq y\leqq p \text{ に対し，} & \varphi_r(y)=\left\{\dfrac{\sin p\beta_r\sinh\alpha_r y}{\sinh p\alpha_r}-\sin\beta_r y\right\} \\ p\leqq y\leqq \dfrac{n}{2} \text{ に対し} & \varphi_r(y)=\dfrac{\sin p\beta_r}{\cos\left(\frac{n}{2}-p\right)\beta_r}\left\{\dfrac{\cos\left(\frac{n}{2}-p\right)\beta_r\cosh\left(\frac{n}{2}-y\right)\alpha_r}{\cosh\left(\frac{n}{2}-p\right)\alpha_r}-\cos\left(\frac{n}{2}-y\right)\beta_r\right\} \end{array}\right\} \quad \text{--------} \quad 16)$$

§4. 結　論

以上の如くして，相似荷重群を求め得たならば，これを用いて，荷重を展開し，一本横桁の単純梁格子桁と同じ方法で連続梁を解くことができる。尚，13), 14) の式から γ を求めるには，この式を一度微分して，Newton の方法を用いて，逐次その根を求めて行けば，比較的容易である。これらの直交函数系列の計算例は，講演の際に提示する。