

IV-17 ローゼ析の固有周期について

九州大学工学部

正員

山崎 徳也

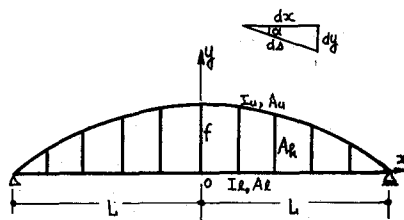
ローゼ析の固有周期の算定法として Ritz の方法を適用せんとするにあたり、対称および逆対称の両振動に分け、前者においては水平推力 N を、これによる上弦および下弦材の水平変位 δ_1 , δ_2 の和がモーメントによる支束の水平変位 δ_3 に等しいという条件より撓みの函数として表し、エネルギーを求め固有振動数の算出を可能とした。なお又の函数となる変断面は取扱ひ可能であるが、簡単のため上下弦は夫々同一断面とし、また上弦曲線は、パラボラの場合を取扱った。

1. 対称振動

上弦曲線 $y = \frac{f}{L^2} (L^2 - x^2)$

$$\delta_1 = 2 \int_0^L \frac{N \sec \alpha \cdot d\alpha}{E A_u} \cos \alpha = 2 \int_0^L \frac{N \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{E A_u} dx = \frac{2NL}{E A_u} \left(1 + \frac{2f^2}{3L^2}\right)$$

$$\delta_2 = 2 \int_0^L \frac{N}{E A_l} dx = \frac{2NL}{E A_l}$$



上下弦材の振動撓みを、中央支を原点にとり次の如くする。

$$\eta = \eta_0 \cos \omega t = \left[a_n \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right] \cos \omega t$$

但し $a_n \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}$ は橋の両端の境界条件を満足し、 ω は振動率。

さすれば、モーメントによる上弦材の水平変位は、

$$\delta_3 = 2 \int_0^L \left(\frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \right) y \cdot dx = 2 \int_0^L \left(\sum a_n \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{(2L)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) \frac{f}{L^2} (L^2 - x^2) dx = \frac{8f}{L\pi} \sum \frac{a_n}{2n-1}$$

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_3 \text{ より}$$

$$N = \frac{4Ef}{\pi L^2} \left\{ \frac{A_l A_u}{A_l \left(1 + \frac{2f^2}{3L^2}\right) + A_u} \right\} \sum \frac{a_n}{2n-1} = k \sum \frac{a_n}{2n-1} \quad \text{但し } k = \frac{4Ef}{\pi L^2} \cdot \frac{A_l A_u}{A_l \left(1 + \frac{2f^2}{3L^2}\right) + A_u}$$

(a) 吊材の伸びを省略した場合

Potential Energy $V = (N$ による上弦材の energy $V_1) + (N$ による下弦材の energy $V_2)$

+ (Moment による上弦材の energy $V_3) + (Moment$ による下弦材の energy $V_4)$

$$\begin{aligned} \text{即ち } V &= \int_0^L \frac{(N \sec \alpha)^2}{2E A_u} dx + \int_0^L \frac{N^2}{2E A_l} dx + \int_0^L \frac{M_u^2}{2EI_u} dx + \int_0^L \frac{M_l^2}{2EI_l} dx \\ &= \int_0^L \frac{(N \sec \alpha)^2}{2E A_u} dx + \int_0^L \frac{N^2}{2E A_l} dx + \int_0^L \frac{1}{2EI_u} \left(-EI_u \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \right)^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2EI_l} \left(-EI_l \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \right)^2 dx \\ &= \frac{k^2 L}{2E A_u A_l} \left\{ A_l \left(1 + \frac{4f^2}{3L^2}\right) + A_u \right\} \left\{ \sum \frac{a_n}{2n-1} \right\}^2 + \frac{\pi^4 E}{64L^3} (I_u + I_l) \sum a_n^2 (2n-1)^4 \end{aligned}$$

$$\text{Kinetic Energy } T = \frac{1}{2} \frac{w}{g} \omega^2 \int_0^L \left[\sum a_n \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right]^2 dx = \frac{wL}{4g} \omega^2 \sum a_n^2 \quad \begin{cases} g: \text{重力の加速度} \\ w: \text{橋の単位長当り重量} \end{cases}$$

$T - V = F$ とし $\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial a_n} = 0$ より $a_1, a_2, \dots, a_n$ に関する線型同次連立方程式

を作り, これより $a_1, a_2, \dots, a_n$ を消去して振動数方程式を導き, 所要次数までの振動数を求める。

(h) 吊材の伸びを考慮した補正

$$\alpha \text{ 点の垂直分力 } H = -N \sec \alpha \cdot \sin \alpha = -N \tan \alpha = -N \frac{dy}{dx}$$

$$dx \text{ 部分の鉛直分力の和 } = -N \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot dx = -\frac{2fN}{L^2} dx$$

$$\therefore dx = l \text{ (格間長) とすれば吊材の張力 } P \text{ が得られる。即ち } P = \frac{2fl}{L^2} N$$

従って任意点 x の吊材の伸びは断面積を A_k として

$$\varepsilon = \frac{y}{A_k E} \left(\frac{2f l N}{L^2} \right) = \frac{2f^2 l N}{A_k E L^4} (L^2 - x^2) = \frac{2f^2 l (L^2 - x^2)}{A_k E L^4} k \cdot \sum \frac{a_n}{2n-1}$$

故に下弦材の撓みにこの ε を附加しなくてはならず, 下弦材のモーメントによる energy V_4 および Kinetic Energy T が増加し, 吊材自身の energy V_5 もあらわれる。しかし N は対称一次振動では極めて大きく影響するが, 他の振動型では影響小さく対称一次のみ即ち a_1 だけをとった場合の補正量を考へてみる。 $N = k a_1$, $n=1$ とする

$$\Delta V_4 = \int_0^L \frac{(1-E\varepsilon)^2}{2EI_k} \left\{ \left(\frac{d^2 \eta_0}{dx^2} + \frac{d^2 \varepsilon}{dx^2} \right)^2 - \left(\frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \right)^2 \right\} dx = \frac{EI_k}{2} \left\{ 2 \int_0^L a_1 \frac{\pi^2}{(2L)^2} \cos \frac{\pi}{2L} x \cdot \frac{4f^2 l k}{A_k E L^4} a_1 dx + \int_0^L \frac{16f^2 l^2 k^2 a_1^2}{A_k^2 E^2 L^8} dx \right\}$$

$$= 2a_1^2 \frac{I_k f^2 l k}{A_k L^5} \left(\pi + \frac{4f^2 l k}{A_k E L^2} \right)$$

$$\Delta T_1 = \frac{1}{2} \frac{w}{g} \omega^2 \int_0^L \left\{ (\eta_0 + \varepsilon)^2 - \eta_0^2 \right\} dx = \frac{w}{2g} \omega^2 \left\{ 2 \int_0^L a_1 \cos \frac{\pi}{2L} x \cdot \frac{2f^2 l k a_1}{A_k E L^4} (L^2 - x^2) dx + \int_0^L \frac{4f^2 l^2}{A_k^2 E^2 L^8} (L^2 - x^2)^2 dx \right\}$$

$$= a_1 \frac{w}{g} \omega^2 \left\{ \frac{32f^2 l k}{A_k E \pi^3 L} + \frac{16f^2 l^2 k^2}{15 A_k^2 E^2 L^5} \right\}$$

$$\text{吊材の伸びの energy } V_5 = \sum \frac{P^2 y}{2EA_k} = \sum \frac{2f^2 l^2 k^2 (L^2 - x^2)}{EA_k L^6} a_1^2 \quad \text{但し } \sum \text{は吊材数について, } x \text{ は吊材位置の座標とする。}$$

(c) 橋軸方向伸びによる Kinetic Energy の増加

$$\text{任意点の橋軸方向伸び } \delta x = N(L+x)/EA_k$$

$$\Delta T_2 = \frac{1}{2} \frac{w}{g} \omega^2 \int_0^L \left\{ \frac{N(L+x)}{EA_k} \right\}^2 dx = \frac{w}{2g} \omega^2 \frac{6L^3 N^2}{3E^2 A_k^2} \quad n=1, N = k a_1 \text{ の時 } \Delta T_2 = \frac{w L^3 k^2}{9E^2 A_k^2} a_1^2 \omega^2$$

2. 逆対称振動

逆対称振動には N は作用しない。上下弦材の振動撓みを, 中央点を原点にとり次の如くする。

$$\eta = \eta_0 \cos \omega t = \sum b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \omega t \quad (b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \text{ は橋の両端の境界条件と満足し, } \omega \text{ は振動率})$$

$$\text{Potential Energy } V = (\text{Moment による上弦材の energy } V_3) + (\text{Moment による下弦材の energy } V_4)$$

$$\text{即ち } V = \int_0^L \frac{M_u^2}{2EI_u} dx + \int_0^L \frac{M_l^2}{2EI_l} dx = \int_0^L \frac{1}{2EI_u} \left\{ EI_u \sum b_n \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sin \frac{n\pi}{L} x \right\}^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2EI_l} \left\{ EI_l \sum b_n \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sin \frac{n\pi}{L} x \right\}^2 dx$$

$$= \frac{\pi^4 E}{4L^3} (I_u + I_l) \sum n^4 b_n^2$$

$$\text{Kinetic Energy } T = \frac{1}{2} \frac{w}{g} \omega^2 \int_0^L \left\{ \sum b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}^2 dx = \frac{wL}{4g} \omega^2 \sum b_n^2$$

$T - V = F$ とし対称振動に於ると同様, 所要次数までの振動数を求める。

	対称振動		逆対称振動	
	1次	2次	1次	2次
計算	0.348 0.368*	0.262	0.584	0.157
実測	0.35		0.50	

* (a), (b), (c) の補正を入れたもの

日向大橋につき対称逆対称の Parameter を 3 個にとり計算を行った。実測との誤差は計算に用いた data を粗く扱ふこと, Parameter 数の少ない事, 更に上弦材の横変位, 床組等の共同作用の無現などあつて算出出来るものであり本計算法は実用上充分ある精度を有すると言へる。

本研究は文部省科学研究費の補助を受けたことを所記する。