

III-35 開水路水流の基礎方程式について(特に横流入のある場合)

北大 工学部 正員 工博 岸 力

建設省土木研究所 正員 〇王 方一(WANG, Fang-yi)

[1] 本文に用いる記号:

u : x 方向の局部流速, U : 断面平均流速, d : 水面より水路底面へ下す垂直深さ, $\bar{x}$ は重心迄のそれ, h_g : 水面の基準面迄の鉛直高さ $= Z_0 + h \cos \theta$, F_p : 断面に働く圧力, $\bar{p}$: 断面重心 $\bar{x}$ の圧力強度, F_R : 側壁および底面の反力の x 方向成分, F_g : 水柱重量の x 方向成分, F_f : 接触面摩擦力, q : 単位巾当り流入量, M_g : 流入水の運動量, ϵ の他添字子のあるものは流入水と関係する量

[2] 運動量則による導導

運動量則を断面 1, 2 間の水塊に適用すると

$$\int_A \left(u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) (\rho \cdot u \cdot \delta t \cdot dA) - M_g = F_{p1} - F_{p2} + F_R + F_g - F_f \quad \dots \dots \dots (A_1)$$

$$(F_p = \bar{p} \cdot A, \quad F_{p1} - F_{p2} = -\frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} \cdot A) \delta x, \quad F_R = \bar{p} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \delta x, \quad F_g = \gamma \cdot A \cdot \delta x \cdot \cos \theta \cdot i_g, \quad i_g: \text{重心線} \\ \text{の水平との傾斜度, } F_f = \tau_b \cdot s \cdot \delta x, \quad \tau_b: \text{底面剪断力強度, } s: \text{潤边}).$$

$$\text{整理すると } \rho \frac{\partial}{\partial x} (d_m Q U) \delta x + \rho \frac{\partial}{\partial t} (U A) \delta x = \rho \cdot g \cdot d_m g \cdot U_g \delta x - A \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \delta x + \gamma A \delta x \cos \theta \cdot i_g - \tau_b \cdot s \cdot \delta x \quad \dots \dots \dots (A_2)$$

$$\therefore d_m \text{ は Coriolis の係数 } = \int_A u^2 dA / AU^2 = 1 + \epsilon$$

今 $\cos \theta \cdot i_g = \sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \cos \theta$ の関係を入れると

$$\frac{d_m}{gA} \frac{\partial}{\partial x} (QU) + \frac{1}{gA} \frac{\partial}{\partial t} (UA) + \cos \theta \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = \sin \theta - i_f + \frac{d_m g U U_g}{g} \left(-\frac{g}{a} \right) \quad \dots \dots \dots (A_3)$$

$$(i_f = \frac{U^2}{C^2 R})$$

連続式 $\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = g$ $\dots \dots \dots (a)$ を代入すれば

$$\cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{d_m}{g} U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{(1-d_m)}{g} \cdot \frac{U}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = \sin \theta - i_f - \frac{d_m U^2}{g} \left(-\frac{g}{a} \right) (1-\zeta) \quad \dots \dots \dots (A_4)$$

$$(\zeta = d_m g U_g / d_m U, \quad 1-d_m = -\epsilon)$$

$$\text{定常流のときは } \sin \theta - \cos \theta \frac{dh}{dx} = i_f + \frac{d}{dx} \left(d_m \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{d_m U^2}{g} \left(-\frac{g}{a} \right) (1-\zeta) \quad \dots \dots \dots (A_5)$$

$$\text{あるいは } \frac{dh}{dx} = \left[\sin \theta - i_f - 2 \frac{d_m U^2}{g} \left(-\frac{g}{a} \right) (1-\frac{\zeta}{2}) + \frac{d_m}{g} \frac{Q^2 h}{A^3} \frac{db}{dx} \right] / \left[\cos \theta - \frac{d_m Q^2 h}{g A^3} B \right] \quad \dots \dots \dots (A_5')$$

(B: 水表面巾)

[3] エネルギー則による導導

$$\int_A \left(u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{u^2}{2g} + Z_0 + z \cos \theta \right) \cdot \gamma \cdot u \cdot \delta t \cdot dA + \gamma \cdot g \cdot \delta x \left\{ \frac{d_m U^2}{2g} - \frac{d_{m2} U_g^2}{2g} \right\} - \gamma \cdot g \cdot \delta x \cdot (Z_0 + h \cos \theta) \\ = - \int \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot dA) \cdot \delta x \cdot u - \tau_b \cdot s \cdot \delta x \cdot u \quad \dots \dots \dots (B_1)$$

(a) を入れると

$$\cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{d_m}{g} U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d_m}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{(d_m - d_{m2})}{2g} \cdot \frac{U}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = \sin \theta - i_f - \frac{d_m U^2}{g} \left(-\frac{g}{a} \right) (1-\frac{\zeta}{2}) \quad \dots \dots \dots (B_2)$$

$$\therefore \text{に } d_e = \int_A u^2 dA / AU^2 \div 1 + 3\gamma, \quad \xi = d_e U^2 / d_e U^2, \quad (d_e - d_m)/2 \div ?$$

$$\text{定常流のときは } \sin \theta - \cos \theta \frac{dh}{dx} = \gamma_f + \frac{d}{dx} \left(d_e \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{d_e U^2}{g} \left(\frac{g}{Q} \right) \left(1 - \frac{\xi}{2} \right) \dots \dots \dots (B_2)$$

$$\text{あるいは } \frac{dh}{dx} = \left[\sin \theta - \gamma_f - 2 \frac{d_e U^2}{g} \left(\frac{g}{Q} \right) \left(1 - \frac{\xi}{4} \right) + \frac{d_e Q^2}{g A^3} h \frac{db}{dx} \right] / \left[\cos \theta - \frac{d_e Q^2}{g A^3} B \right] \dots \dots \dots (B_2')$$

[4] 流出の場合には ξ の代りに $(-\xi)$ を結果式に入れればよい。また圧力分布係数 $\beta_e = 1 + \lambda_e$ を含ませて運動量則で導くと

$$\beta_e \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{d_m}{g} U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{(1 - d_m)}{g} \cdot \frac{U}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = \sin \theta - \gamma_f - \frac{d_m U^2}{g} \left(\frac{g}{Q} \right) (1 - \xi) \dots \dots \dots (A_2)$$

$\therefore$ に $\beta_e = 1 + \lambda_e = 1 + \int_A p' \cdot u \cdot dA / h \cos \theta \cdot Q$, p' は静圧以外の圧力強度, $p' = 0$ のとき $\lambda_e = 0$, (A₂) は (A₁) になる。

[5] 結論摘要

(1): 水路中で変化する場合, 運動量式の外力の一つとして側壁反力を加えて導いた式は岩垣式(あるいは馬井-沢田-加藤式)とは中一様の場合の結果が一致するが, 変化する場合には, 反力 $\bar{p} \frac{\partial A}{\partial x} \delta x$ の影響だけ異なる。すなわち本文の式は岩垣式

$$\gamma \frac{\partial}{\partial t} (UA) \delta x + \rho \frac{\partial}{\partial x} (d_m U^2 A) \delta x = -\gamma_e \cdot \delta x - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} \cdot dA) \delta x$$

の右辺に $\bar{p} \frac{\partial A}{\partial x} \delta x$ を加えた基本形より導いている。

(2) エネルギー則による誘導に際し, 流入水が合流して本流から供給される速度に伴う運動エネルギーを抵抗として入れれば斜め流入の場合には運動量則による誘導式とは流入項の $\frac{U^2}{g} \left(\frac{g}{Q} \right)$ に変わる係数が $d_m (1 - \xi)$ と $d_e (1 - \frac{\xi}{2})$ との相違を生じ, 直角流入であれば d_m と d_e の差異だけとなる。

(a): 式(B₂)で $U_g = 0$ とし岩垣式(エネルギー則)の結果形

$$\cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{d_m}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(d_e \frac{U^2}{2g} \right) + \frac{d_m - d_e}{2g} \cdot \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = \sin \theta - \gamma_f - \frac{g}{Q} \left(\frac{d_e U^2}{2g} + h \cos \theta \right)$$

と比べると, 本文の末項が $\frac{g}{Q} \left(\frac{d_e U^2}{g} \right)$ になっており, $\frac{g}{Q} \cdot \frac{d_e U^2}{2g}$ の量が多く, また $\frac{g}{Q} h \cos \theta$ の量が少ない。

(b): 式(B₂)を物部式(エネルギー則)

$$i_0 - \frac{dh}{dx} = \gamma_f + \frac{d}{dx} \left(\frac{U^2}{2g} \right) + \frac{1}{2} \frac{U^2}{g} \left(\frac{g}{Q} \right) \left(1 - \frac{U_g^2}{U^2} \right)$$

と比べると流入項の $\frac{U^2}{g} \left(\frac{g}{Q} \right)$ につく係数がそれぞれ $\frac{1}{2} (1 - \frac{\xi}{2})$ と $d_e (1 - \frac{\xi}{2})$ になっている。

$$(\xi = U_g^2 / U^2)$$

また(B₂)'を物部式の他の形

$$\frac{dh}{dx} = \left[i_0 - \gamma_f - \frac{3}{2} \frac{U^2}{g} \left(\frac{g}{Q} \right) \left(1 - \frac{\xi}{3} \right) + \frac{1}{g A^3} h \frac{db}{dx} \right] / \left[1 - \frac{1}{g A^3} B \right]$$

と比べるとこの形では $\frac{U^2}{g} \left(\frac{g}{Q} \right)$ につく係数がそれぞれ $\frac{3}{2} (1 - \frac{\xi}{3})$ と $2 d_e (1 - \frac{\xi}{4})$ になっている点で異なる。