

京大防災研究所 正員 足立昭平

開水路水流に関する模型実験において、その相似律を決定づけるものは水流の抵抗法則にある。しかしながら水路を構成する材料が同一であっても、他の水理条件が異なると、摩擦抵抗係数は変化するのが普通であり、とくに小規模の固定床模型水路では、水深の変動とともに摩擦係数は著るしく変化する。したがってこのような固定床模型実験においては、摩擦係数の変動について十分な吟味が必要であり、また模型縮尺の歪みの問題もこの点から議論されねばならない。本研究はこの問題の基本的考察の一つとして、矩形断面水路における乱流の摩擦抵抗に関する側壁の役割を検討したものである。

層流の速度分布は流体の粘性に支配されるけれども、乱流においては粘性による応力のほかに、変動速度によるいわゆる Reynolds 応力が働き、壁面のごく近傍を除くほとんど Reynolds 応力が支配的であることが知られている。風洞実験によれば、乱流の変動速度の相関は流路の中心部で 0 と推定され、流路断面の流速分布は流路中心面を境として左右独立であると思倣うことができる。同様な推論を矩形断面水路の側壁と底面との間に適用すれば、流路断面の流速分布は、Reynolds 応力が 0 であるような、ある境界面によってそれぞれ独立な部分に分けることができる。この推論はまた、流路断面の等流速曲線が流路壁面にはほぼ平行に描けることから、是認できるのである。

いまこのような境界面が存在するとして、流路断面を分割し、それぞれの領域内の速度分布は対数法則に従うものとする。

$$u/u_{*1} = (1/K) \ln M_1 z, \quad u/u_{*2} = (1/K) \ln M_2 y \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここに u は底面から z あるいは側壁から y の距離にある点の流速を、 u_{*1} , u_{*2} はそれぞれ底面および側壁の摩擦速度を、また K は乱流の混合に関する常数をあらわし、 M_1 , M_2 はそれぞれ底面および側壁の粗滑の状態によって次式で与えられる。

$$\text{粗面に対して } M_1(\text{or } 2) = 1/m_r k_{s1}(\text{or } 2), \quad \text{滑面に対して } M_1(\text{or } 2) = u_{*1}(\text{or } 2)/m_s \gamma \quad \dots \dots (2)$$

ただし m_r , m_s は層流底層の厚さに関する実験常数であって、Nikuradse の円管実験にもとづけば、 $m_r = 1/30$, $m_s = 1/9$ である。また γ は流体の動粘性係数であり、 $k_{s1}(\text{or } 2)$ は粗面の凹凸の高さを代表するもので Nikuradse の砂粒粗面に対応し、相当粗面と名付けられている。

分割した 2 つの領域の境界線の方程式は (1), (2) 式から

$$y = \beta z^\alpha \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{ただし } \alpha = u_{*1}/u_{*2}, \quad \beta = M_1^\alpha/M_2 \quad \dots \dots \dots (4)$$

両領域の面積を A_1 , A_2 、水深を h 、水路半巾を b であらわせば、平均流速 u_m は

$$u_m = \frac{1}{A_1 + A_2} \left[\int_{A_1} u dA_1 + \int_{A_2} u dA_2 \right]$$

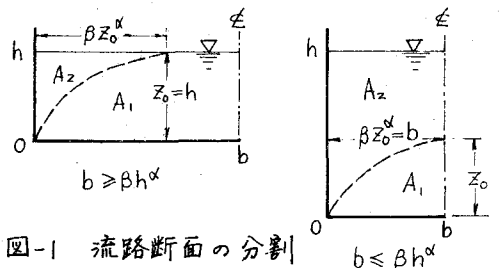


図-1 流路断面の分割

(1), (3)式の関係を用いて積分すると

$$u_m = \frac{u_{x1}}{K} \ln M_1 z - \frac{u_{x1}}{K} \left(\frac{z_0}{h} + \frac{1}{\alpha} \frac{\beta z_0^\alpha}{b} - \frac{1}{\alpha+1} \frac{z_0 \beta z_0^\alpha}{h b} \right) \quad \text{or} \quad \frac{u_{x2}}{K} \ln M_2 \beta z_0^\alpha - \frac{u_{x2}}{K} \left(\alpha \frac{z_0}{h} + \frac{\beta z_0^\alpha}{b} - \frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{z_0 \beta z_0^\alpha}{h b} \right) \quad (5)$$

ここに z_0 は積分上限であり、(図-1) $b \geq \beta h^\alpha$; $z_0 = h$, $b \leq \beta h^\alpha$; $\beta z_0^\alpha = b$ (6)

一す境界線 $y = \beta z_0^\alpha$ 上では、剪断応力が0であるから、それぞれの分割部分についての力の平衡条件から、 u_{x1} および u_{x2} は $u_{x1} = g A_1 I / b$, $u_{x2} = g A_2 I / h$ (7)

ここに g は重力の加速度、 I はエネルギー勾配である。(3)式から A_1, A_2 を計算し、 u_{x1}^2 / u_{x2}^2 を求めると
$$\alpha^2 = \frac{u_{x1}^2}{u_{x2}^2} = \frac{g h I \left(1 - \frac{1}{\alpha+1} \frac{\beta z_0^\alpha}{b} \right) \cdot \frac{z_0}{h}}{g b I \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+1} \cdot \frac{z_0}{h} \right) \cdot \frac{\beta z_0^\alpha}{h}} \quad (8)$$

積分上限 z_0 は(6)式で与えられるから $\gamma = h/b$ とおくと、結局

$$\begin{cases} \alpha \geq \gamma; & z_0 = h, & \beta h^\alpha / b = \gamma (\alpha+1) / (\alpha^2 + \gamma) \\ \alpha \leq \gamma; & \beta z_0^\alpha = b, & (\beta h^\alpha / b)^{-1/\alpha} = \alpha (\alpha+1) / (\alpha^2 + \gamma) \end{cases} \quad (8)$$

(8)式の関係を用いると(6)式は $u_{x1} = (\alpha / \sqrt{\alpha^2 + \gamma}) \sqrt{g h I}$, $u_{x2} = (1 / \sqrt{\alpha^2 + \gamma}) \sqrt{g h I}$ (9)

(8), (9)式を(5)式に代入して、平均流速は次式であらわされる。

$$\begin{cases} \alpha \geq \gamma; & u_m = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma}} \sqrt{g h I} \cdot \frac{1}{K} \left[\ln M_1 h - 1 - \frac{\gamma}{\alpha (\alpha + \gamma)} \right], \quad \text{or} \quad \frac{u_m}{\sqrt{g R I}} = \alpha \frac{\sqrt{1+\gamma}}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma}} \cdot \frac{1}{K} \left[\ln M_1 R - 1 + \ln(1+\gamma) - \frac{\gamma}{\alpha (\alpha^2 + \gamma)} \right] \\ \alpha \leq \gamma; & u_m = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma}} \sqrt{g h I} \cdot \frac{1}{K} \left[\ln M_1 h - 1 - \frac{\alpha^2 \gamma (\alpha + \gamma)}{\alpha (\alpha^2 + \gamma)} \right], \quad \text{or} \quad \frac{u_m}{\sqrt{g R I}} = \alpha \frac{\sqrt{1+\gamma}}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma}} \cdot \frac{1}{K} \left[\ln M_1 R - 1 + \ln(1+\gamma) - \frac{\alpha^2 \gamma (\alpha + \gamma)}{\alpha (\alpha^2 + \gamma)} \right] \end{cases} \quad (10)$$

ここに R は径深である。水路の摩擦係数 λ は $\sqrt{2/\lambda} = u_m / \sqrt{g R I}$ であり、また河川工学で普通用いられている Chezy および Manning の粗度係数は、それぞれ $c = \sqrt{g} \cdot (u_m / \sqrt{g R I})$ および $n = R^{1/6} / \sqrt{g} \cdot (u_m / \sqrt{g R I})$ で表示される。

底面と側壁の摩擦速度の比 α は、それぞれの面の粗滑の状態が与えられれば(2), (4)および(8)式から、水深 h と水路半巾 b の比 γ の函数として与えることができる。たとえば側壁、底面とも水理学的に滑面である場合には、(2)式から $M_1 = u_{x1} / m_s \nu$, $M_2 = u_{x2} / m_s \nu$, したがって(4)式から $\beta = \alpha (u_{x1} / m_s \nu)^{\alpha-1}$, 一方(9)式の $u_{x1} = (\alpha / \sqrt{\alpha^2 + \gamma}) \gamma^{1/2} \sqrt{g b I}$ に着目すると(8)式から
$$\begin{cases} \alpha \geq \gamma; & \alpha^{-\alpha} (\alpha+1) (\alpha^2 + \gamma)^{\frac{1}{2}(\alpha-3)} \gamma^{-\frac{3}{2}(\alpha-1)} = (\sqrt{g b I} \cdot b / m_s \nu)^{\alpha-1} \\ \alpha \leq \gamma; & \{\alpha^2 (\alpha+1)\}^{-\alpha} \{\gamma^{-1} (\alpha^2 + \gamma)\}^{\frac{1}{2}(3\alpha-1)} = (\sqrt{g b I} \cdot b / m_s \nu)^{\alpha-1} \end{cases} \quad (12)$$

が得られる。(12)式を α について直接的に解くことは困難であるが、左辺が α と γ だけで構成され、また右辺が γ を含まないことから、図式解法によれば比較的容易に解を得ることができる。すなわち両辺の対数をとれば、左辺は流路条件には無関係に γ を parameter として α に対して計算され、一方右辺は流路条件が与えられると $(\sqrt{g b I} \cdot b / m_s \nu)$ が決定し、 α に対して線形となる。 α に対するこれら両辺の対数は比較的簡単に図化され、それらの交点から水深 h に対応する α の値を求めることができる。側壁、底面とも粗面の場合あるいは両壁面の粗度が異なる場合についても、全く同様にして求めることができる。

これらの計算の結果、従来ともすれば軽視されがちであった、開水路乱流の抵抗法則に関して、側壁の影響を明らかにすることができ、とくに側壁と底面との粗度が異なる場合について、H. A. Einstein 氏の方法が修正を要するであろうことを見出した。なお本研究は文部省科学試験研究補助金をうけて遂行された。ここに深甚なる謝意を表する次第である。