III—27　洪水流の理論的解析

京都大学防災研究所　正員　矢野勝正

1.　基礎方程式　洪水流の運動方程式　$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-g\frac{u^2}{C^2H}+g\left(i-\frac{\partial H}{\partial x}\right)$ ……………… (1)

と，連続方程式　$\frac{\partial H}{\partial t}+u\frac{\partial H}{\partial x}+H\frac{\partial u}{\partial x}=0$ ……(2)　において，まず(1)式の加速度項を省略して，$u=C\sqrt{H\left(i-\frac{\partial H}{\partial x}\right)}$ ……(3)　を(2)式に入れると，

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{3}{2}C\sqrt{H\left(i-\frac{\partial H}{\partial x}\right)}\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{C^2H^2}{2C\sqrt{H\left(i-\frac{\partial H}{\partial x}\right)}}\frac{\partial H}{\partial x^2} \quad\cdots\cdots (4)$$

しかるに，F_rをフラウド数として　$u=\sqrt{gH}\cdot F_r$　を(4)式に代入すると，

$$\frac{\partial H}{\partial t}+k_1H^{1/2}\frac{\partial H}{\partial x}=k_2H^{3/2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \cdots\cdots (5)$$

但し　$k_1=\frac{3}{2}\sqrt{g}\cdot F_r$，　$k_2=\frac{C^2}{2\sqrt{g}\cdot F_r}$ ……… (6)

(5)式を　$|H(x,t)|_{t=0}=H_0'$，　$|H(x,t)|_{x=0}=H_0'+\frac{H_m}{2}\pm\varphi(t)=H_0\pm\varphi(t)$，　$\left|\frac{\partial H(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\infty}=0$ ……(7)

なる条件のもとに解く。それには　$H(x,t)=H_0+h(x,t)$，　$H_0>h(x,t)$　という新しい関数 $h(x,t)$ を用いて，(5)式を変形すると

$$\frac{\partial h}{\partial t}+k_1H_0^{1/2}\left(1+\frac{h}{2H_0}\right)\frac{\partial h}{\partial x}=k_2H_0^{3/2}\left(1+\frac{3}{2}\frac{h}{H_0}\right)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad\cdots\cdots (8)$$

となるから(8)式を線型化するために　$h(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A^n h_n(x\cdot t)$ ……(9)　とおいて A^n の項を等しくおくと，第一近似解を与える基礎方程式は

$\frac{\partial h_1}{\partial t}+\mu_1\frac{\partial h_1}{\partial x}=\mu_2\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}$ ……(10)　であって，この式を

$|h_1|_{t=0}=H_0'-H_0$，　$|h_1|_{x=0}=\pm\varphi(t)$，　$\left|\frac{\partial h_1}{\partial x}\right|_{x=\infty}=0$ ………(11)　なる条件のもとに解けばよい。

第2近似解は　$\frac{\partial h_2}{\partial t}+\mu_1\frac{\partial h_2}{\partial x}=\mu_2\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}+P_2(x,t)$ ……(12)　を　$|h_2|_{t=0}=0$，$|h_2|_{x=0}=0$，$\left|\frac{\partial h_2}{\partial x}\right|_{x=\infty}=0$ の条件で解けばよいことになる。　但し　$\mu_1=k_1H_0^{1/2}$，　$\mu_2=k_2H_0^{3/2}$ ……… (13)

及び　$P_2(x,t)=k_2H_0^{3/2}\frac{3h_1}{2H_0}\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}-k_1H_0^{1/2}\frac{h_1}{2H_0}\frac{\partial h_1}{\partial x}$ ……(14)　である。

$\varphi(t)$ は $x=0$ の地点の水位変化を示す。

2.　第1近似解.

(10)式の $h_1(x,t)$ を更に　$v(x,t)=h_1(x,t)+H_0-H_0'$ ……(15)　に置換えると，

$\frac{\partial v}{\partial t}+\mu_1\frac{\partial v}{\partial x}=\mu_2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ……(16)　なる式を　$|v|_{t=0}=0$，$|v|_{x=0}=\frac{1}{2}H_m\pm\varphi(t)$　$\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=\infty}=0$

のもとに解く。又更に，　$v(x,t)=\exp\left(\frac{\mu_1}{2\mu_2}x-\frac{\mu_1^2}{4\mu_2}t\right)\phi(x,t)$ ……(17)　とおくと(16)式は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=\mu_2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \quad\cdots\cdots (18)$$

この式は熱伝導に関する微分方程式で，　$|\phi|_{t=0}=0$，　$|\phi|_{x=0}=\{H_0-H_0'\pm\varphi(t)\}e^{\frac{\mu_1^2}{4\mu_2}t}=F(t)$，

$\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=\infty}=0$　の条件で解くことになる。

そのために　$|\phi|_{t=0}=F_0=const.$　$|\phi|_{x=0}=0$　でまず解く。$\phi(x,t)$ を Fourier の積分関係

$$\phi(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_0^{\infty}\phi(\lambda,t)\sin\alpha x\cdot\sin\alpha\lambda\,d\lambda \quad\cdots\cdots (19)$$

として(18)式に代入すると，　$\frac{\partial\phi(\lambda,t)}{\partial t}+\mu_2\alpha^2\cdot\phi(\lambda t)=0$ ……(20)　が成立しなければならないので，　$\phi(\lambda,t)=F_0\cdot e^{-\mu_2\alpha^2 t}$　従って(19)式は

$$\phi(x,t)=\frac{2F_0}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_0^{\infty}e^{-\mu_2\alpha^2 t}\cdot\sin\alpha x\sin\alpha\lambda\,d\lambda=\frac{F_0}{2\sqrt{\mu_2\pi t}}\int_0^{\infty}\left\{e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4\mu_2 t}}-e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4\mu_2 t}}\right\}d\lambda \quad\cdots\cdots (21)$$

次に $|\phi|_{t=0}=F_0=const$, $|\phi|_{x=0}=F_c=const$ の解及び更に $|\phi|_{t=0}=0$, $|\phi|_{x=0}=F_c$ の解を求めると

$$\phi(x,t)=F_c-\frac{2F_c}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{\mu_2 t}}e^{-\beta^2}d\beta \qquad (22)$$

となり，特に $F_c=1$ のときは単位図を表すことになる。

$|\phi|_{t=0}=0$, $|\phi|_{x=0}=F(t)$ の解は Duhamel の原理を用いて

$$\phi(x,t)=\int_0^t F(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\psi(x,t-\tau)\,d\tau \qquad (23)$$

$$\text{但し}\quad \psi(x,t)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\mu_2 t}}}e^{-\beta^2}d\beta \qquad (24)$$

最初の未知関数 $H(x,t)$ にかきなほすと，結局

$$H(x,t)=H_0'+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{\mu_2 t}}}^{\infty}\exp\left\{-\left(\alpha-\frac{\mu_1 x}{4\mu_2\alpha}\right)^2\right\}\left\{\frac{H_m}{2}\pm\varphi\left(t-\frac{x^2}{4\mu_2\alpha^2}\right)\right\}d\alpha \qquad (25)$$

となって 第1近似解を求めることができる.

今 $\varphi_0(t)=\frac{1}{2}H_m\pm\varphi(t)$ とおいて，$\varphi_0(t)$ を Fourier 級数で表すと

$$\varphi_0(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\sin\frac{n\pi t}{T} \qquad (26) \qquad \text{但し}\quad \Gamma_n=\frac{2}{T}\int_0^T\varphi(\mu)\sin\frac{n\pi}{T}\mu\,d\mu \qquad (27)$$

T は洪水の継続時間である。そうすると(25)式は

$$h_1(x,t)+\frac{1}{2}H_m=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\left(\alpha-\frac{\mu_1 x}{4\mu_2\alpha}\right)^2\right\}\varphi_0\left(t-\frac{x^2}{4\mu_2\alpha^2}\right)d\alpha-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\mu_2 t}}}\exp\left\{-\left(\alpha-\frac{\mu_1 x}{4\mu_2\alpha}\right)^2\right\}\varphi_0\left(t-\frac{x^2}{4\mu_2\alpha^2}\right)d\alpha \qquad (28)$$

となって，第1項は積分可能で，これを I_1 とかくと

$$I_1=\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\exp\left\{\frac{\mu_1 x}{2\mu_2}-\frac{\mu_1 x}{2\mu_2}\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu_1 x}{2\mu_2}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{T}\frac{2x}{\mu_1}\right)^2}-1\right\}}\right\}\sin\left\{\frac{n\pi t}{T}-\frac{\mu_1 x}{2\mu_2}\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\left(\frac{\mu_1 x}{2\mu_2}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{T}\frac{2x}{\mu_1}\right)^2}-1\right\}}\right\} \qquad (29)$$

となるが，第2項は積分出来ない。

そこで $\varphi_0=1$ として単位図を求めて，$\varphi_0=\varphi_n=const$ をこの単位図にかけて $(n-1)\Delta t$ だけずらして加算する近似法で数値計算を行う.

3. 数値計算

(28)式を実際に用いるため $\varphi_0=1$ とすると，

$$H(x,t)=h_1(x,t)+\frac{1}{2}H_m=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\left(\alpha-\frac{\mu_1 x}{4\mu_2\alpha}\right)^2\right\}d\alpha-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\mu_2 t}}}\exp\left\{-\left(\alpha-\frac{\mu_1 x}{4\mu_2\alpha}\right)^2\right\}d\alpha \qquad (30)$$

Duhamel の原理によって，まず単位図を求めると

$$H^*(x,t)=\left[1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\mu_2 t}}}\exp\left\{-\left(\alpha-\frac{\mu_1 x}{4\mu_2\alpha}\right)^2\right\}d\alpha\right]-\left[1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\mu_2(t-\Delta t)}}}\exp\left\{-\left(\alpha-\frac{\mu_1 x}{4\mu_2\alpha}\right)^2\right\}d\alpha\right] \qquad (31)$$

(31)の第1項は $\eta=\alpha-\frac{\mu_1 x}{4\mu_2 x}$ とおいて変形すると（第1項を H_1^* と表して）

$$H_1^*=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu_1 t}{2\sqrt{\mu_2 t}}}e^{-\eta^2}d\eta\pm\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu_1 t}{2\sqrt{\mu_2 t}}}\frac{\eta e^{-\eta^2}}{\sqrt{\eta^2+\frac{\mu_1}{\mu_2}x}}d\eta\right\} \qquad (32)$$

さらに $\zeta=\sqrt{\eta^2+\frac{\mu_1}{\mu_2}x}$ とおくと結局

$$H_1^*=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^{X''}e^{-\zeta^2}d\zeta+e^{X^2}\int_0^{X'}e^{-\zeta^2}d\zeta\right\}-\frac{1}{2}\left(e^{X^2}-1\right) \qquad (33)$$

$$\text{但し}\quad X=\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}x},\quad X'=\frac{x+\mu_1 t}{2\sqrt{\mu_2 t}},\quad X''=\frac{x-\mu_1 t}{2\sqrt{\mu_2 t}} \qquad (34)$$

となるから Gauss の関数表を用いて数値計算を行うことが出来る。