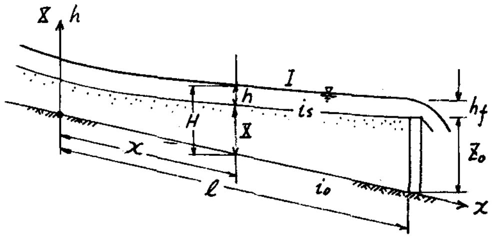
III－8　砂防ダムの堆砂勾配について

京都大学防災研究所　正員　矢野勝正
仝　上　准員〇大同淳之
京都府土木部　木下新一



流砂量と河床変動に関する連続方程式は一般に

$$\frac{1}{1-\lambda}\cdot\frac{\partial q_s}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial t}=0 \quad \cdots\cdots (1)$$

として表される。図のように記号をとる。

河床が動的に安定状態にあるということは

$$\partial z/\partial t=0 \quad \text{又は} \quad \partial q_s/\partial x=0 \quad \cdots (2)$$

ということである。流砂量の公式としてブラウンの実験式の形に限界掃流力を導入した形を用いると

$$q_s=\beta u^*(u^{*2}-u_c^{*2})^m \qquad \text{但し} \quad \beta=\frac{k\,d}{[\{(\sigma/\rho)-1\}gd]^m} \quad \cdots\cdots (3)$$

である。(3)式を x で微分すると

$$\frac{dq_s}{dx}=\beta(u^{*2}-u_c^{*2})^{m-1}(u^{*2}-u_c^{*2}+2mu^{*2})\frac{du^*}{dx} \quad \cdots\cdots (4)$$

$dq_s/dx=0$ であるためには，$u^*=u_c^*$，$u^*=u_c^*/\sqrt{1+2m}$　$du^*/dx=0$　のいずれかが必要であるが，流砂現象が発生しているということは $u^*>u_c^*$ であるから，$du^*/dx=0$ のみが河床安定の条件を満足している。摩擦速度 u^* は

$$u^*=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}=\sqrt{ghI}=\sqrt{gh\left(i_s-\frac{dh}{dx}\right)} \quad \cdots\cdots (5)$$

で表されるので，(5)式を x で微分して

$$\frac{du^*}{dx}=\frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{h\left(i_s-\frac{dh}{dx}\right)}}\left\{\left(i_s-\frac{dh}{dx}\right)\frac{dh}{dx}+h\left(\frac{di_s}{dx}-\frac{d^2h}{dx^2}\right)\right\}$$

$du^*/dx=0$ の安定条件から

$$\frac{di_s}{dx}+\frac{1}{h}\frac{dh}{dx}i_s=\frac{d^2h}{dx^2}+\frac{1}{h}\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 \quad \cdots\cdots (6)$$

という $i_s(x)$ に関する安定条件を意味した微分方程式が成立しなければならない。

この i_s を河床勾配にもった水流の運動方程式は，流れを不等速定流と考えると

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2g}\right)=-\frac{v^2}{c^2h}+\left(i_s-\frac{dh}{dx}\right) \quad \cdots\cdots (7)$$

で表されるので，水深 h は連続方程式 $q=v\cdot h$ を用いてかき直すと

$$\frac{dh}{dx}=i_s\frac{h^3-h_c^3}{h^3-h_c^3} \quad \cdots\cdots (8)$$

従って　$$i_s=\frac{q^2}{c^2}\frac{1}{h^3}+\left(1-\frac{h_c^3}{h^3}\right)\frac{dh}{dx} \quad \cdots\cdots (9)$$

$$\frac{di_s}{dx} = -\frac{3q^2}{c^2h^4}\cdot\frac{dh}{dx} + \frac{3h_c^3}{h^4}\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 + \frac{h^3-h_c^3}{h^3}\frac{d^2h}{dx^2} \qquad \text{------------} \quad (10)$$

以上の(9)および(13)式の i_s と di_s/dx を(6)式に入れて i_s を消去して h のみの微分方程式を誘導すると，

$$\frac{d^2h}{dx^2} + \frac{2q^2}{c^2h_c^3}\frac{1}{h}\frac{dh}{dx} - \frac{2}{h}\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 = 0 \qquad \text{------------} \quad (11)$$

この微分方程式をとくと

$$\frac{dh}{dx} = C_1h^2 + \frac{q^2}{c^2h_c^3} \qquad \text{------------} \quad (12)$$

砂防堰堤のはるか上流では，等速定流状態とみなせるから

$$\left|\frac{dh}{dx}\right|_{h=h_0} = 0 \qquad \text{------------} \quad (13)$$

という境界条件が成立するから，積分定数 C_1 は　$C_1 = -\frac{q^2}{c^2h_c^3h_0^2} = -\frac{h_0}{h_c^3}i_0$

従って (12) 式は

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i_0h_0}{h_c^3}(h_0^2-h^2) \qquad \text{------------} \quad (14)$$

そこでもう一度(14)式を積分すると

$$x = \frac{h_c^3}{i_0h_0}\int\frac{dh}{h_0^2-h^2} + C_2 = C_2 - \frac{h_c^3}{2i_0h_0^2}\log\frac{h-h_0}{h+h_0} \qquad \text{------------} \quad (15)$$

次に溢流点の水深を h_f とすると

$$|h|_{x=l} = h_f \qquad \text{------------} \quad (16)$$

の境界条件を用いて，C_2 を求めると　$C_2 = l + \frac{h_c^3}{2i_0h_0^2}\log\frac{h_f-h_0}{h_f+h_0}$　従って x は

$$x = l + \frac{h_c^3}{2i_0h_0^2}\log\frac{h_f-h_0}{h_f+h_0}\,\frac{h+h_0}{h-h_0} \qquad \text{------------} \quad (17)$$

(17)式から逆に $h(x)$ を求めると

$$h(x) = \frac{\frac{h_f+h_0}{h_f-h_0}\exp\left\{-\frac{2i_0h_0^2}{h_c^3}(l-x)\right\}+1}{\frac{h_f+h_0}{h_f-h_0}\exp\left\{-\frac{2i_0h_0^2}{h_c^3}(l-x)\right\}-1}\cdot h_0 \qquad \text{------------} \quad (18)$$

そこで求める安定勾配は $h(x)$ が(18)式で求められたから，(9)式の dh/dx に(14)式に代入すると

$$i_s(x) = \frac{i_0h_0}{h_c^3}\left(h_0^2-h^2+\frac{h_c^3}{h}\right) \qquad \text{------------} \quad (19)$$

となって，安定勾配を決定することができる

幅 20 cm，長さ 15.0 m の実験水路において，堆砂勾配および溢流点における水深 h_f について実験を行い，後者についても若干の成果をうると共に，上式の妥当なることを確め得た。