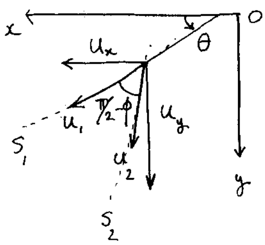
II―24　塑性流動における速度場に関する二三の問題

中央大学工学部　正員　山口 柏樹

等方非可圧なる完全塑性体の流動速度成分に関する特性曲線は，応力の特性曲線（辷り線）と一致し，Geiringer の式が成立つことは周知であるが，摩擦性塑性体においては，両特性曲線は異なるものとなる．従来解の一意性に対する必要条件の一つとして両者の一致が要求されていたに止まり（R. Hill の推測）又塑性流動状態における応力―歪み増分の関係も知られていなかった．

両特性曲線が一致するために 等方性の代りに異方性を考えることも出来るが理論上難点が多い（例えば応力円は楕円に替らねばならない）ので，非可圧の仮定のみを棄てることにする．二次元歪み問題での等方性の仮定は速度成分でかくと（Fig. 1 参照）



(Fig. 1)

$$\partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x = \cot(2\theta-\phi)\left(\partial u_y/\partial y - \partial u_x/\partial x\right) \qquad (1)$$

これを辷り線に関して変換し

$$\left(\partial u_1/\partial s_1 + \sin\phi\, \partial u_2/\partial s_1 - u_2\cos\phi\, \partial\theta/\partial s_1\right) - \left(\partial u_2/\partial s_2 + \sin\phi\, \partial u_1/\partial s_2 + u_1\cos\phi\, \partial\theta/\partial s_2\right) = 0$$

仮にこの各項が独立に0となるとせば

$$\left.\begin{aligned} \partial u_1/\partial s_1 + \sin\phi\, \partial u_2/\partial s_1 - u_2\cos\phi\, \partial\theta/\partial s_1 &= 0 \\ \partial u_2/\partial s_2 + \sin\phi\, \partial u_1/\partial s_2 + u_1\cos\phi\, \partial\theta/\partial s_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

これは $\phi \neq 0$ なる時の拡張されたGeiringer の式と考えうる

(2)を再び $x\,y$ 座標にもどして

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\theta\, \partial u_x/\partial x + \sin^2\theta\, \partial u_y/\partial y + \cos\theta\sin\theta\left(\partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x\right) &= 0 \\ \sin^2(\theta-\phi)\, \partial u_x/\partial x + \cos^2(\theta-\phi)\, \partial u_y/\partial y + \cos(\theta-\phi)\sin(\theta-\phi)\left(\partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x\right) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

これから（$\partial u_x/\partial x = \dot{\varepsilon}_x$　$\partial u_y/\partial y = \dot{\varepsilon}_y$　$\partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x = \dot{\gamma}_{xy}$）

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{-\sin\theta\cos(\theta-\phi)}{\cos(2\theta-\phi)}\dot{\gamma}_{xy} \qquad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\cos\theta\sin(\theta-\phi)}{\cos(2\theta-\phi)}\dot{\gamma}_{xy} \qquad (3)$$

またわ

$$\dot{e} = \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y) = \frac{-\sin\phi}{2\cos(2\theta-\phi)}\dot{\gamma}_{xy} \qquad (3')$$

(3')は新に得られた可圧性の式である 事実 (1)(3')についての特性曲線が辷り線と一致することは容易に示される．(2)の物理的意味は辷り線に関する伸び速度が0であることと同値で，従って辷り線(s_i)が流線($u_j=0$)なら s_i に沿う速度成分 u_i は一定である

$\cos(2\theta-\phi)=0$ は Rankine 領域で行われるがこの時は $\dot{\varepsilon}_1 = \partial u_x/\partial x$　$\dot{\varepsilon}_2 = \partial u_y/\partial y$ が主成分となり(3')の代りに次式が行われる

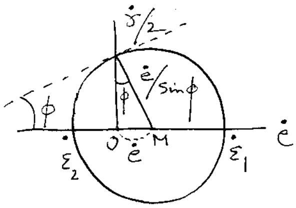
$$(\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2)/(\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2) = \sin\phi \sim (\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 + \sigma_2) = \sin\phi$$

(3)より θ を消して Mohr の応力円と相似的な歪速度円

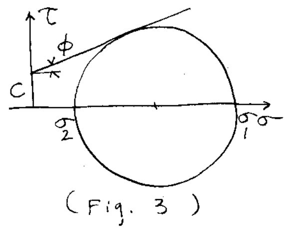
$$\dot{e}^2/\sin^2\phi = (\dot{\varepsilon}_x - \dot{e})^2 + (\dot{\gamma}_{xy}/2)^2$$

を得る（Fig. 2 参照）が応力円（Fig. 3）との対応によって k を比例的係数とすると

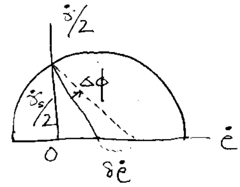
$$\left.\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= k\left[\sigma_1 - \cos^2\phi\,(\sigma_1+\sigma_2)/2 + C\sin\phi\cos\phi\right] \\ \dot{\varepsilon}_2 &= k\left[\sigma_2 - \cos^2\phi\,(\sigma_1+\sigma_2)/2 + C\sin\phi\cos\phi\right] \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$



(Fig. 2)



(Fig. 3)



(Fig. 4)

(4)は塑性流動における応力と歪み速度（または歪み増分）を規定する関係式である。

三次元え拡張すれば

$$\dot{\varepsilon}_x = \left[2k/(2+\cos^2\phi)\right]\left(\sigma_x - \frac{\cos^2\phi}{2}\,\overline{\sigma_y+\sigma_z} + C\sin\phi\cos\phi\right) \qquad \dot{\gamma}_{xy} = 2k\tau_{xy}$$

これから $\frac{1}{2}\cos^2\phi$ は塑性流動における Poisson 比に相当するものと考えられる、なお主応力成分差引くと二、三次元を通して von Mises 式と相同な $\dot{\varepsilon}'_x = k\sigma'_x$，$\dot{\gamma}_{xy} = 2k\tau_{xy}$ が得られることも容易に判明する。

k の意味を調べるには弾塑性関係式から出発せねばならぬようである。G を弾性率、m を弾性 Poisson 数とすると (4) の代りに

$$2G\dot{\varepsilon}_x = \lambda\left(\sigma_x - \cos^2\phi\,\overline{\sigma_x+\sigma_y}/2 + C\sin\phi\cos\phi\right) + \frac{m-1}{m}\left(\dot{\sigma}_x - \frac{\dot{\sigma}_y}{m-1}\right), \quad G\dot{\gamma}_{xy} = \lambda\tau_{xy} + \dot{\tau}_{xy}$$

$$\therefore \quad k = \lim_{G\to\infty} \lambda/2G$$

これと Mohr の破壊条件式：$(\sigma_x-\sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x+\sigma_y+2c\cot\phi)^2\sin^2\phi$ より

$$k = \left[(\sigma_x-\sigma_y)(\dot{\varepsilon}_x-\dot{\varepsilon}_y) + 2\tau_{xy}\dot{\gamma}_{xy} - (\sigma_x+\sigma_y+2c\cot\phi)(\dot{\varepsilon}_x+\dot{\varepsilon}_y)\,m\sin^2\phi/(m-2)\right] \Big/ \left\{(\sigma_x-\sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2\right\}\left(1 - \frac{m\sin^2\phi}{m-2}\right)$$

この分子は形状変化に費やされる純塑性仕事の意味をもつ。

剛塑性境界に関しては以下の二つの性質が明になった。i)剛塑性境界を通じ速度が連続ありとせば境界はすべり線と一致する ii)任意曲線についてその法線方向 (η) の $\dot{\varepsilon}_\eta$ が 0 であれば該曲線はすべり線である。例えば切線方向 ξ に対して

$$\dot{\varepsilon}_\xi = k\left[\sigma_\xi - \frac{\cos^2\phi}{2}(\sigma_\xi+\sigma_\eta) + C\sin\phi\cos\phi\right] \quad \dot{\varepsilon}_\eta = 0 = k\left[\sigma_\eta - \frac{\cos^2\phi}{2}(\sigma_\xi+\sigma_\eta) + C\sin\phi\cos\phi\right] \quad \dot{\gamma}_{\xi\eta} = 2k\tau_{\xi\eta}$$

他方

$$(\sigma_\xi-\sigma_\eta)^2 + 4\tau_{\xi\eta}^2 = (\sigma_\xi+\sigma_\eta+2c\cot\phi)^2\sin^2\phi$$

$$\therefore \quad \tau_{\xi\eta} = C + \sigma_\eta\tan\phi$$

これは $\tau_{\xi\eta}$ がすべり線上の剪断応力に外ならぬことを意味する。

剪断時の砂質土の膨脹収縮が ϕ の変化による（密なものはゆるみ $\Delta\phi<0$，ゆるいものはつまって $\Delta\phi>0$）とすると，剪断すべり容積変化率は Fig. 4 より

$$\delta\dot{e} = \dot{\gamma}_s\Delta\phi/2\cos^2\phi \qquad \therefore \delta e = \left(\gamma_s\,\Delta\phi/2\cos^2\phi\right)_{mean}$$

ここに $\dot{\gamma}_s$ はすべり線に関する量である。

本研究は摩擦性材料に関する塑性論の一部であるが，これに関しては東京大学最上教授に絶えざる御指導を仰いでいる次第である。末尾ながらここに厚く御礼申し上げる。