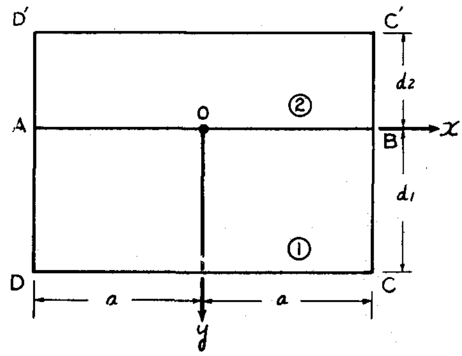
I —43　不完全合成桁材の捩り

都立大学　正員　　山本　稔



合成桁では材相互の結合の程度に応じたズレが接合面に発生するから剪断応力が完全に伝達されず,したがつて曲げ剛性が低下するが,この現象については理論及び実験において既に種々論ぜられている。これと同様な現象が合成桁材の捩り剛性においても存在するわけで,単一材の捩りとはかなりおもむきを異にすると考えられる。しかしながら筆者の知るところではこの方面の研究は未だ見当らず,かつまた最近構造法の進歩により捩り剛性も考慮されるような傾向になつてきたのでこの種の問題の解析は設計上の参考にもなるとおもわれる。

そこでまず手始めとして図に示すような剛性率の異る2種の矩形材を一様な強さのシヤーコネクターで結合した合成桁材の Saint Venant の捩りについて理論解析をこゝろみた。記号の使用にあたつて ABCD 材に関するものは添符 1, A B C′D′材に関するものは添符 2 をつけて区別する。

境界條件として材の側面には外力が作用しないから応力函数 ϕ は次式のようにおける。

$$\phi_1 = 0 \quad , \quad \phi_2 = 0 \qquad (1),\ (2)$$

連続條件として接合面の応力の連続性から

$$\tau_{yz1}\big|_{y=0} = \tau_{yz2}\big|_{y=0} \qquad (3)$$

また接合面のズレはそこに発生する剪断応力に比例すると考えれば

$$\left(w_1\big|_{y=0} - w_2\big|_{y=0}\right) k' = \tau_{yz1}\big|_{y=0} \qquad (4)$$

したがつて(1),(2),(3),(4)の條件を満足するような応力函数 ϕ を探せばよい。この ϕ として次の形の級数を用いる。

$$\phi_{1,2} = G_{1,2}\theta(a^2 - x^2) + \sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2a}x\left\{A_{1,2(2n+1)}\cosh\frac{(2n+1)\pi}{2a}y + B_{1,2(2n+1)}\sinh\frac{(2n+1)\pi}{2a}y\right\}$$

こゝに G は剛性率, θ は単位の捩れ角で添符 1,2 について個々に等式を成立させる。

$\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ を Fourier の級数に展開し, ϕ を(1),(2)の條件式に代入すれば DC, D′C′側面において

$$A_{1(2n+1)}\cosh\frac{(2n+1)\pi}{2a}d_1 + B_{1(2n+1)}\sinh\frac{(2n+1)\pi}{2a}d_1 = (-1)^{n+1}\frac{2^5}{(2n+1)^3\pi^3}G_1\theta a^2 \qquad (5)$$

$$A_{2(2n+1)}\cosh\frac{(2n+1)\pi}{2a}d_2 - B_{2(2n+1)}\sinh\frac{(2n+1)\pi}{2a}d_2 = (-1)^{n+1}\frac{2^5}{(2n+1)^3\pi^3}G_2\theta a^2 \qquad (6)$$

また(3)の條件式からは同様に$\frac{x}{a}$をFourierの級数に展開して

$$A_{1(2n+1)} - A_{2(2n+1)} = (-1)^{n+1}\frac{2^5}{(2n+1)^3\pi^3}(G_1 - G_2)\theta a^2 \qquad (7)$$

終りに(4)の條件式からは

$$-A_{1(2n+1)}\frac{(2n+1)\pi}{2a} + \frac{k'}{G_1}B_{1(2n+1)} - \frac{k'}{G_2}B_{2(2n+1)} = (-1)^n\frac{2^4}{(2n+1)^2\pi^2}G_1\theta a \qquad (8)$$

かくして(5)〜(8)式を連立して解けば常数が定められるから問題は解決されたことになる。そこで

$$(-1)^{n+1}\frac{2^5}{(2n+1)^3\pi^3}G\theta a^2 a_{1n} = A_{1(2n+1)}, \qquad (-1)^{n+1}\frac{2^5}{(2n+1)^3\pi^3}G\theta a^2 b_{1n} = B_{1(2n+1)}$$

$$(-1)^{n+1}\frac{2^5}{(2n+1)^3\pi^3}G\theta a^2 a_{2n} = A_{2(2n+1)}, \qquad (-1)^{n+1}\frac{2^5}{(2n+1)^3\pi^3}G\theta a^2 b_{2n} = B_{2(2n+1)}$$

$$\cosh\frac{(2n+1)\pi}{2a}d_1 = \alpha_{1n},\ \sinh\frac{(2n+1)\pi}{2a}d_1 = \beta_{1n},\ \cosh\frac{(2n+1)\pi}{2a}d_2 = \alpha_{2n},\ \sinh\frac{(2n+1)\pi}{2a}d_2 = \beta_{2n}$$

$$k_n = \frac{2a}{(2n+1)\pi}\cdot\frac{k'}{G}, \qquad \frac{G_1}{G} = g_1, \qquad \frac{G_2}{G} = g_2$$

とおけば連立方程式の解として次式をうる。

$$a_{1n} = \frac{(g_1 - g_2)\dfrac{k_n\beta_{1n}}{g_2\alpha_{1n}} + \dfrac{1}{\alpha_{1n}\alpha_{2n}}(g_1\beta_{1n}\beta_{2n} + k_n\beta_{1n} + k_n\beta_{2n})}{\dfrac{\beta_{1n}\beta_{2n}}{\alpha_{1n}\alpha_{2n}} + \dfrac{k_n\beta_{2n}}{g_1\alpha_{2n}} + \dfrac{k_n\beta_{1n}}{g_2\alpha_{1n}}}$$

$$a_{2n} = \frac{-(g_1 - g_2)\left(\dfrac{\beta_{1n}\beta_{2n}}{\alpha_{1n}\alpha_{2n}} + \dfrac{k_n\beta_{2n}}{g_1\alpha_{2n}}\right) + \dfrac{1}{\alpha_{1n}\alpha_{2n}}(g_1\beta_{1n}\beta_{2n} + k_n\beta_{1n} + k_n\beta_{2n})}{\dfrac{\beta_{1n}\beta_{2n}}{\alpha_{1n}\alpha_{2n}} + \dfrac{k_n\beta_{2n}}{g_1\alpha_{2n}} + \dfrac{k_n\beta_{1n}}{g_2\alpha_{1n}}}$$

$$b_{1n} = \frac{k_n\left(1 - \dfrac{1}{\alpha_{2n}}\right) - g_1\left(1 - \dfrac{1}{\alpha_{1n}}\right)\left(\dfrac{k_n}{g_2} + \dfrac{\beta_{2n}}{\alpha_{2n}}\right)}{\dfrac{\beta_{1n}\beta_{2n}}{\alpha_{1n}\alpha_{2n}} + \dfrac{k_n\beta_{2n}}{g_1\alpha_{2n}} + \dfrac{k_n\beta_{1n}}{g_2\alpha_{1n}}}$$

$$b_{2n} = \frac{-k_n\left(1 - \dfrac{1}{\alpha_{1n}}\right) + g_2\left(1 - \dfrac{1}{\alpha_{2n}}\right)\left(\dfrac{k_n}{g_1} + \dfrac{\beta_{1n}}{\alpha_{1n}}\right)}{\dfrac{\beta_{1n}\beta_{2n}}{\alpha_{1n}\alpha_{2n}} + \dfrac{k_n\beta_{2n}}{g_1\alpha_{2n}} + \dfrac{k_n\beta_{1n}}{g_2\alpha_{1n}}}$$

特別の場合として$k' \to \infty$, $G_1 = G_2 = G$とすれば$2a \times (d_1 + d_2)$の單一矩形斷面材の捩れとなり既にえられている解と一致する。

端面に働く捩りモーメントは

$$\mathfrak{M} = G\theta a^4\left[\frac{8}{3}\left(\frac{d_1}{a}g_1 + \frac{d_2}{a}g_2\right) - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^9}{(2n+1)^5\pi^5}\left\{a_{1n}\beta_{1n} + a_{2n}\beta_{2n} + b_{1n}(\alpha_{1n} - 1) - b_{2n}(\alpha_{2n} - 1)\right\}\right]$$

また接合面の剪斷応力は

$$\tau_{yz1}\Big|_{y=0} = G\theta a\left[2g_1\frac{x}{a} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^4}{(2n+1)^2\pi^2}a_{1n}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2a}x\right]$$