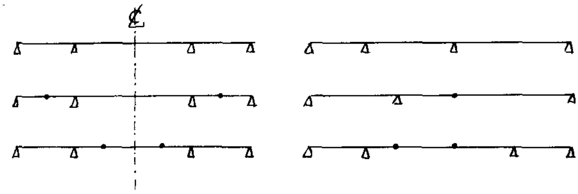
I—41 多スパン桁の自由横振動

早大 理工學部 正員 平島政治

桁の横振動を研究するとき，先づ取り上げる要素は自由振動数であり，結局振動数方程式の解を求めることが当面の問題となる。一般に，振動数方程式は行列式の形で與えられるが，スパンの数，ヒンジの数が多くなるとその計算はかなり面倒になる。そこで，行列式の形を簡単にすることを試みた。

先づ，一般の多スパン桁を大別して，対稱軸を持つ形式と，持たない形式との2つに分ける。こゝにいう対稱性については，第1圖を参照されたい。

さて，対稱軸を持つ形式の桁について考察する。この形式の桁の正規振動型は対稱振動型と斜対稱振動型とに分けて，解析することができ，振動数方程式は，第1式のような形で表はされる。



$$\left.\begin{array}{ll}\text{対稱}: & T(kl_a)\\ \text{斜対稱}: & C(kl_a)\end{array}\right\}=F(kl_b,\ kl_c,\ \cdots)\qquad\cdots\text{第1式}$$

次に，対稱軸を持たない形式の桁の振動数方程式を求めると，第2式のような形で表はされることがわかる。

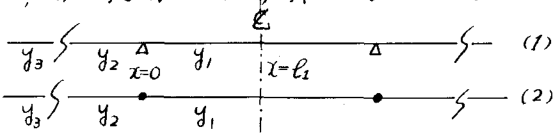
$$C(kl_a)=F'(kl_b,\ kl_c,\ \cdots)\qquad\cdots\text{第2式}$$

こゝに，

$$T(kl)=Tanh(kl)+Tan(kl)$$
$$C(kl)=Coth(kl)-Cot(kl)$$

最初に，対稱軸を持つ形式の桁の振動数方程式が，第1式のように表はされることを示す。先づ，対稱軸を持つ多スパン桁を，第2圖(1)，(2)のような2組に分ける。(1)は対稱軸(中心線)の隣りが支持点で始まる形式であり，(2)は，ヒンジ点で始まる形式である。

さて，中央点における境界條件を，A, B．y_1とy_2との接續点における境界條件をC, D, E, F．y_2とy_3との接續点における境界條件をG, H, I, J．(若し，y_2の一方が端末となる場合は，G, H．)とすれば，振動数方程式は，第3式で與えられる。



$$\begin{vmatrix}
A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 & D_7 & D_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 & E_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & G_5 & G_6 & G_7 & G_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & H_5 & H_6 & H_7 & H_8 & H_9 & H_{10} & H_{11} & H_{12} & 0 & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & I_5 & I_6 & I_7 & I_8 & I_9 & I_{10} & I_{11} & I_{12} & 0 & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_9 & J_{10} & J_{11} & J_{12} & 0 & \cdots\\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots\\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots
\end{vmatrix}=0\qquad\text{第3式}$$

さて，こゝで y_1 と y_2 との接続点を坐標原点とし，最初に第2圖 (1) の形式の場合を解析する。先づ境界條件，C,D,E,F，は，次のようになる。

C：　$y_1=0$　，　$C_1=1$，$D_1=0$，$D_5=0$，$E_1=1$，$E_5=-1$，$F_5=1$．

D：　$y_1'=y_2'$　，　$C_2=0$，$D_2=1$，$D_6=-1$，$E_2=0$，$E_6=0$，$F_6=0$．

E：　$y_1''=y_2''$　，　$C_3=1$，$D_3=0$，$D_7=0$，$E_3=-1$，$E_7=1$，$F_7=1$．

F：　$y_2=0$　，　$C_4=0$，$D_4=1$，$D_8=-1$，$E_4=0$，$E_8=0$，$F_8=0$．

これらの値を，第3式に代入し，整理すると，第4式がえられる。

$$\alpha(A_1B_2-A_2B_1+A_2B_3-A_3B_2+A_3B_4-A_4B_3+A_4B_1-A_1B_4)-2\beta(A_2B_4-A_4B_2)=0 \qquad \cdots 第4式$$

次に，中央点における境界條件，A,B を考える。

対稱型

A：　$y_1'=0$，　$A_1=\mathrm{Sinh}\ kl_1$，$B_1=\mathrm{Sinh}\ kl_1$．

B：　$y_1'''=0$，　$A_2=\mathrm{Cosh}\ kl_1$，$B_2=\mathrm{Cosh}\ kl_1$．

$A_3=-\mathrm{Sin}\ kl_1$，$B_3=\mathrm{Sin}\ kl_1$．

$A_4=\mathrm{Cos}\ kl_1$，$B_4=-\mathrm{Cos}\ kl_1$．

斜対稱型

A：　$y_1=0$，　$A_1=\mathrm{Cosh}\ kl_1$，$B_1=\mathrm{Cosh}\ kl_1$．

B：　$y_1''=0$，　$A_2=\mathrm{Sinh}\ kl_1$，$B_2=\mathrm{Sinh}\ kl_1$．

$A_3=\mathrm{Cos}\ kl_1$，$B_3=-\mathrm{Cos}\ kl_1$．

$A_4=\mathrm{Sin}\ kl_1$，$B_4=-\mathrm{Sin}\ kl_1$．

これらの値を第4式に代入し，整理する。

対稱型：

$$\mathrm{Tanh}(kl_1)+\mathrm{Tan}(kl_1)=-2\beta/\alpha$$

又は，

$$\mathrm{T}(kl_1)=\mathrm{F}_1(kl_2,kl_3,\cdots)$$

斜対稱型：

$$\mathrm{Coth}(kl_1)-\mathrm{Cot}(kl_1)=-2\beta/\alpha$$

又は，

$$\mathrm{C}(kl_1)=\mathrm{F}_1(kl_2,kl_3,\cdots)$$

同様な計算を，第2圖 (2) の形式の場合について行うと，次のようになる。

対稱型

$$\mathrm{Tanh}(kl_1)+\mathrm{Tan}(kl_1)=-2\alpha/\beta$$

又は，

$$\mathrm{T}(kl_1)=\mathrm{F}_2(kl_2,kl_3,\cdots)$$

斜対稱型

$$\mathrm{Coth}(kl_1)-\mathrm{Cot}(kl_1)=-2\alpha/\beta$$

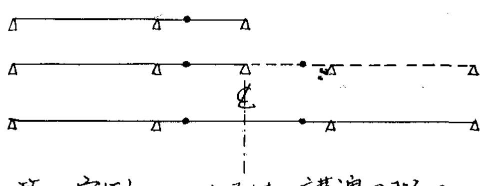
又は

$$\mathrm{C}(kl_1)=\mathrm{F}_2(kl_2,kl_3,\cdots)$$

なお，前述の計算過程より明らかなように，α,β は共に，kl_1 を含まない。

対稱軸を持たない形式の多スパン桁の場合

第3圖に示すように，假想的に桁を延長して考えると，前節に述べたことから，振動数方程式が，第2式の形で表はされることが容易にわかる。



以上に，概要を記したが，連続桁，ゲルバー桁等の実例については，講演の際に詳述する。