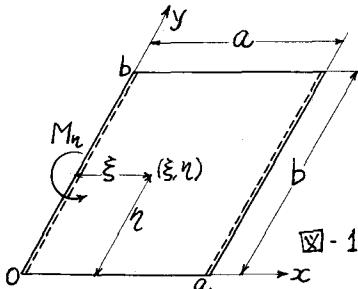


I-39 自由辺と部分固定辺を有する矩形板の曲げ

大阪市立大学 正員 倉田 宗章
全 上 〇 准員 岡村 宏一

要旨—矩形板が相対二辺に於て自由、残りの二辺が任意位置、任意長の固定区間を含む単純支持辺である場合につき、その曲げの一般解式を導き、計算例として、正方形板の対称曲げに対する解を得たので、実験結果と併せ報告する。

1. 周辺に単一曲げモーメントを受ける矩形板



自由辺($y=0, y=b$)を有し、 $x=0, y=\eta$ なる点に単一モーメント M_n を受ける矩形板の撓度 w_n は、 (ξ, η) なる点に unit load を載せる場合の撓度を $\bar{w}(\xi, \eta, x, y)$ とすれば、
 $w_n = M_n \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} \right]_{\xi=0}$ の演算を行つて次の如く求められる。

$$w_n = \frac{M_n}{Dab} \sum_m \sum_n f_{mn}(y) \sin \beta_n \eta \cdot \sin \alpha_m x \quad (1)$$

但し $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$, D = 板の曲げ剛度, ν = ポアソン比。

$$f_{mn}(y) = \frac{\beta_n (\beta_n^2 + 2 - \nu)}{\alpha_m (\alpha_m^2 + \beta_n^2)} \left\{ E_m (d_m y \sinh d_m y - \frac{2}{1-\nu} \cosh d_m y) + F_m \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \sinh d_m y + d_m y \cosh d_m y \right) - \frac{A_{mn}}{1-\nu} \sinh d_m y \right\} + A_{mn} \sin \beta_n y \quad (2)$$

$$\text{茲に } A_{mn} = \frac{4d_m}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2},$$

$$\left. \begin{aligned} E_m &= \frac{\sum \{ (-1)^s \cosh \alpha_m b - \coth \alpha_m b \} \{ 3 + \nu - (-1)^s (1-\nu) \alpha_m b \cosh \alpha_m b \} A_{mn}}{(3+\nu)^2 - \{ (1-\nu) \alpha_m b \cosh \alpha_m b \}^2} \\ F_m &= \frac{\sum \{ 3 + \nu - (-1)^s (1-\nu) \alpha_m b \cosh \alpha_m b \} A_{mn}}{(3+\nu)^2 - \{ (1-\nu) \alpha_m b \cosh \alpha_m b \}^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

2. 部分固定条件を満足するための分布モーメント M_n を決定する方法。

(1) 式より、 $x=0$ なる辺に沿ひ $y=\eta$ なる点の撓角は次の如く求められる。

$$\theta = \left[\frac{\partial w_n}{\partial x} \right]_{x=0, y=\eta} = \frac{M_n}{Dab} \sum_m \sum_n \alpha_m f_{mn}(y) \sin \beta_n \eta \quad (4)$$

今 M_n が $b_1 < \eta < b_2$ なる範囲の分布モーメントである場合、辺($x=0$)上の撓角は(4)式より

$$\theta_y = \frac{1}{Dab} \sum_m \sum_n \alpha_m f_{mn}(y) \cdot \int_{b_1}^{b_2} M_n \sin \beta_n \eta d\eta \quad (5)$$

但、上式中の分布モーメント M_n は次の如き三角級数に依て表示されるものと仮定する。

$$M_n = \sum_s B_s \sin \frac{s\pi(\eta - b_1)}{h} \quad (6) \quad \text{但し } B_s \text{ は未定常数, } b_2 - b_1 = h$$

然る時は(6)を(5)に代入すると、
 $\theta_y = \frac{1}{Dab} \sum_s \sum_m \sum_n \frac{\alpha_m \gamma_s B_s}{\beta_n^2 - \gamma_s^2} \{ (-1)^s \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1 \} f_{mn}(y) \quad (7)$
 但し $\gamma_s = \frac{s\pi}{h}$

但、全じ矩形板に於て、所與の荷重による $x=0$ 辺上の撓角は次の如く表はされる。

$$\theta'_y = \frac{1}{D} \sum_m \sum_n g_{mn}(y) \quad (8) \quad \text{但し } g_{mn}(y) \text{ は(2)式に示す } f_{mn}(y) \text{ と同形のもの}$$

のであるが、たゞ式中の A_{mn} は夫々の荷重状態に対して書き換えねばならない。例えば、

$$\left. \begin{aligned} \text{等分布荷重に対しては, } A_{mn} &= \frac{16g d_m}{\pi^2 (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 m n}, \\ \text{点}(\xi, \eta) \text{に作用する集中荷重に対しては } A_{mn} &= \frac{4Pd_m \sin \alpha_m \xi \sin \beta_n \eta}{ab (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

故に $b_1 < y < b_2$ の区間に於て部分固定の条件を満足するためには、

$$\theta_y + \theta'_y = 0 \quad (b_1 < y < b_2) \quad (10) \quad \text{が成立つ様に } B_s \text{ が決定出来れば問題は解決する。}$$

3. 未定常数 B_5 の決定。函数 $f_{mn}(y)$ 及 $g_{mn}(y)$ は区間 $b_1 < y < b_2$ に於て次の如き Fourier 級数に展開される。

$$f_{mn}(y) = \sum_n C_n \sin \frac{n\pi(y-b_1)}{h} \quad \text{--- (11) 従つて, } \theta_y \text{ 及 } \theta'_y \text{ は (7) 及 (8) より次の如く書かれる。}$$

$$\theta_y = \frac{1}{Dab} \sum_s \sum_m \sum_n \frac{\alpha_s^2 \beta_n B_5}{\beta_n^2 - \gamma_s^2} \{(-1)^s \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} f_{mn}^*(y) \quad \text{--- (7')} \quad \theta'_y = \frac{1}{D} \sum_m \sum_n g_{mn}^*(y) \quad \text{--- (8')}$$

茲に $f_{mn}^*(y)$ は (11) の展開を行つたものであつて次の如く與えられる。即ち, $\delta_k = \frac{k\pi}{h}$ とし,

$$f_{mn}^*(y) = \sum_k \frac{2\delta_k}{h} \sin \delta_k (y-b_1) \left[\frac{A_{mn}}{\beta_n^2 - \delta_k^2} \{(-1)^k \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} - \frac{\beta_n}{d_m(d_m^2 + \delta_k^2)} (\frac{\beta_n^2}{d_m^2} + 2 - \nu) \phi_{k,m,n} \right] \quad \text{--- (12)}$$

$$\text{但し, } \phi_{k,m,n} = \left[d_m \{(-1)^k b_2 \sinh d_m b_2 - b_1 \sinh d_m b_1\} - 2 \left(\frac{d_m^2}{d_m^2 + \delta_k^2} + \frac{1}{1-\nu} \right) \{(-1)^k \cosh d_m b_2 - \cosh d_m b_1\} \right] E_m \quad \text{--- (13)}$$

$$+ \left[d_m \{(-1)^k b_2 \cosh d_m b_2 - b_1 \cosh d_m b_1\} - \left(\frac{2d_m^2}{d_m^2 + \delta_k^2} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \{(-1)^k \sinh d_m b_2 - \sinh d_m b_1\} \right] F_m - \frac{A_{mn}}{1-\nu} \{(-1)^k \sinh d_m b_2 - \sinh d_m b_1\}$$

$g_{mn}^*(y)$ は $f_{mn}^*(y)$ に於て A_{mn} を所與の荷重状態に対し、例えば (9) の書き換えを行つて得る式である。故に、 B_5 決定の條件式は (10) 式に依り次の様に書ける。

$$\frac{1}{ab} \sum_s \sum_m \sum_n \frac{\alpha_s^2 \beta_n B_5}{\beta_n^2 - \gamma_s^2} \{(-1)^s \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} \left[\frac{A_{mn}}{\beta_n^2 - \delta_k^2} \{(-1)^k \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} - \frac{\beta_n}{d_m(d_m^2 + \delta_k^2)} (\frac{\beta_n^2}{d_m^2} + 2 - \nu) \phi_{k,m,n} \right]$$

$$= - \sum_m \sum_n \left[\frac{A_{mn}}{\beta_n^2 - \delta_k^2} \{(-1)^k \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} - \frac{\beta_n}{d_m(d_m^2 + \delta_k^2)} (\frac{\beta_n^2}{d_m^2} + 2 - \nu) \phi'_{k,m,n} \right] \quad \text{--- (10')}$$

茲に A_{mn} , $\phi'_{k,m,n}$ は A_{mn} , $\phi_{k,m,n}$ に於て荷重状態に依り例えば (9) の書き換えを行つて得られるものとす。
(10) は未定常数 B_5 に対し、無限連立 1 次方程式であつて、これより B_5 を求むれば、分布モーメント (6) が決定出来る。

4. 部分固定辺 ($x=0$, $b_1 < y < b_2$ 区間固定) 及自由辺 ($y=0$, $y=b$) を有する板の撓度。

区間 $b_1 < y < b_2$ に於いて決定された分布モーメント M_n による板の撓度 W_n は (1) より

$$W_n = \frac{1}{Dab} \sum_s \sum_m \sum_n \frac{\gamma_s B_5}{\beta_n^2 - \gamma_s^2} \{(-1)^s \sin \beta_n b_2 - \sin \beta_n b_1\} f_{mn}(y) \sin d_m x \quad \text{--- (14)}$$

えを荷重に依る撓度に superpose すると所題の板の撓度が得られる。

5. 計算例 一 圖に示す如き正方形板の対称曲ゲ ($a=l$, 固定区間 $h=a/3$) の場合に就き数値的結果を示す、圖-2 に示すものは等分布荷重を受ける場合の等撓度曲線圖、圖-3 に示すものは同じ荷重を受ける場合の曲ゲモーメント圖である。

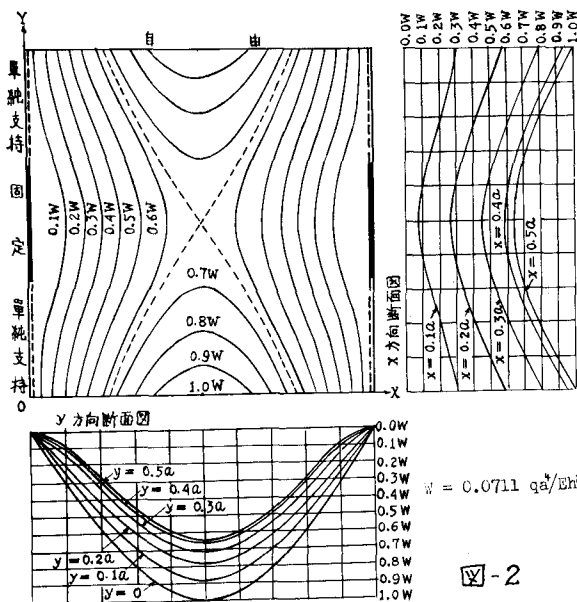


圖-2

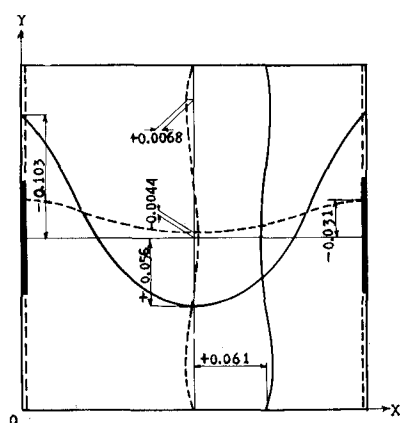


圖-3