Ⅰ—38　立体構造物の変位の万能解法について

山梨大学　正員　近藤繁人

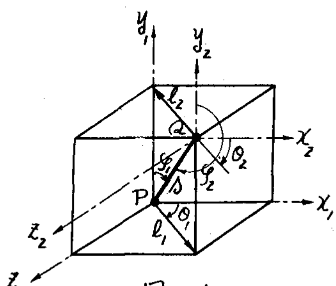
1. 要旨

立体構造物の変位を求めるのには、これまで主にCastiglianoの定理による方法が用いられた。これはただ1点の1方向への変位を求めるのには大変便利であるが、数多くの点の任意の方向への変位を求めるのには不便である。従って私はまず立体トラスの変位を求める方法について考究し、部材廻転角を利用してすべての節点の直交3軸方向への変位を同時に求める方法を提案し、土木技術オ13巻オ3号に発表したが、その方法が、トラス—ラーメン，直線—曲線，静定—不静定，立体—平面，を問わずあらゆる構造物に適用できることに着目し，変位の万能解法と名づけて　ここに述べることにする。

2. 構造物中の1部材PQの表わし方

長さsの部材PQがy軸となす角をφ，PQを含む鉛直面とxy平面の間の角をθとすれば，sのx，y，z軸方向の分長は，

$$\left.\begin{aligned} x &= s\sin\varphi\cos\theta = l\cos\theta \\ y &= s\cos\varphi \\ z &= s\sin\varphi\sin\theta = l\sin\theta \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$



図－1

ここに　$-90^\circ < \theta \leqq 90^\circ$

$0^\circ \leqq \varphi < 360^\circ$

とすれば，すべての空間直線を式(1)で表わすことができる。またlは，sのxz平面への分長で

$$\left.\begin{aligned} &x>0 \text{ または } x=0,\ z>0 \text{ のとき } l>0 \\ &x<0 \text{ または } x=0,\ z<0 \text{ のとき } l<0 \\ &\qquad\qquad\quad x=0,\ z=0 \text{ のとき } l=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

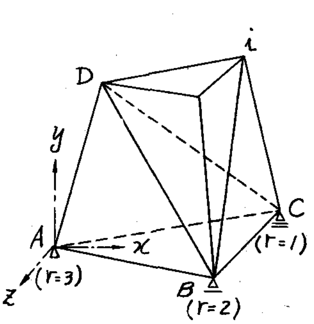
なお，直線PQのx，y，z，l，はそれぞれ直線QPのx，y，z，l，の符号を変えたものに等しく，両直線のθ及びφの間には，次の式が成り立つ。

$$\begin{cases} \theta_2 = \theta_1 \\ \varphi_2 = \varphi_1 + 180^\circ \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \Delta\theta_2 = \Delta\theta_1 \\ \Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1 \end{cases}$$

3. 節点の変位

構造物に荷重が載ると各部材が変形し，1部材の1端Pに対し，他端Qが移動する。その大きさは(1)より

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\sigma}{E}x + \frac{xy}{l}\Delta\varphi - z\Delta\theta \\ \Delta y &= \frac{\sigma}{E}y - l\Delta\varphi \\ \Delta z &= \frac{\sigma}{E}z + \frac{yz}{l}\Delta\varphi + x\Delta\theta \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$



図－2

従って点Aに対する任意の点iの変位は

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x_i &= \sum_A^i \frac{\sigma}{E}x + \sum_A^i \frac{xy}{l}\Delta\varphi - \sum_A^i z\Delta\theta \\
\Delta y_i &= \sum_A^i \frac{\sigma}{E}y - \sum_A^i l\Delta\varphi \\
\Delta z_i &= \sum_A^i \frac{\sigma}{E}z + \sum_A^i \frac{yz}{l}\Delta\varphi + \sum_A^i x\Delta\theta
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

トラスなどのように、Aからiへ行くのに色々な経路がある場合には、どの部材を通って行ってもよい。なるべく近道をした方がよいが、直交3軸に平行な道があれば、それを通った方がよい。

また$\Delta\varphi$の代りに、x, z軸の周りの廻転角ΔR_x, ΔR_zを使い、$\Delta\theta$の代りにΔR_yを使えば

$$\left.\begin{aligned}
\Delta R_x &= -\Delta\varphi\sin\theta = -\frac{z}{l}\Delta\varphi \\
\Delta R_y &= \Delta\theta \\
\Delta R_z &= \Delta\varphi\cos\theta = \frac{x}{l}\Delta\varphi
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

この式を(4)に代入すれば、

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x_i &= \sum_A^i \frac{\sigma}{E}x + \sum_A^i y\Delta R_z - \sum_A^i z\Delta R_y \\
\Delta y_i &= \sum_A^i \frac{\sigma}{E}y + \sum_A^i z\Delta R_x - \sum_A^i x\Delta R_z \\
\Delta z_i &= \sum_A^i \frac{\sigma}{E}z + \sum_A^i x\Delta R_y - \sum_A^i y\Delta R_x
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

式(4)と式(6)とは全く同一の式であるから、$\Delta\varphi$, $\Delta\theta$がわかっているときは(4)を使った方がよく、またΔR_x, ΔR_y, ΔR_zがわかっているときは、(6)を使った方がよい。

一般に1部材の廻転角を未知量に選べば、(3)では$\Delta\varphi$, $\Delta\theta$の2個、(5)ではΔR_x, ΔR_y, ΔR_zの3個あるようにみえるが、(5)において　$\Delta R_x = -(z/x)\Delta R_z$ が成り立つので(5)においても未知量は2個と考えることができる。

なお、トラスに対しては(4)、ラーメン構造に対しては(6)を使う方が便利で、曲り梁に対しては、(6)を積分の形に直して

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x_i &= \int_A^i \frac{\sigma}{E}dx + \int_A^i \Delta R_z\,dy - \int_A^i \Delta R_y\,dz \\
\Delta y_i &= \int_A^i \frac{\sigma}{E}dy + \int_A^i \Delta R_x\,dz - \int_A^i \Delta R_z\,dx \\
\Delta z_i &= \int_A^i \frac{\sigma}{E}dz + \int_A^i \Delta R_y\,dx - \int_A^i \Delta R_x\,dy
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

ここにΔR_x, ΔR_y, ΔR_zは載荷後の切線の廻転角を表わす。

平面構造物に対しては　θ, z, $d\theta$, dz, ΔR_x, ΔR_y を全部0とおき　$l = x$ とおけばよい。