I—37　マトリックスによるラーメン等の応力の一計算法について

宮崎大学工学部　正員　彦坂良次

不静定構造物の応力の影響線算を求めるには，一般に弾性方程式における未知数の係数よりなる行列(マトリックス)の逆行列を求めればよい。任意の行列の逆行列の計算は次数が二次または三次ならば簡単であるがそれ以上は次数の増すにつれ加速的に困難となる。しかし対角行列とか三元方程式のごとく容易にその逆行列を計算し得る場合もある。従って逆行列の計算も行列の形によりそれぞれ適当な方法を選ぶべきであろう。ここでは行列を小行列を要素とする大行列とみなして計算する方法を採りこれをラーメンの場合に適用してみたものである。

まず最初に任意の対称行列の逆行列をこれにより求める計算順序を左に示す五次の場合について説明する。与えられた行列の要素を点線で境しそれぞれを要素とする小行列を考え，元の行列をこれら小行列よりなる大行列 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ とみなし，その逆行列を同じ区分の小行列よりなる大行列の形にまとめ $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$ とすれば行列の定義により次の関係が成り立つ。

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & & & a_{25} \\ a_{31} & & A_{11} & A_{12} & \\ \hline a_{41} & & A_{21} & A_{22} & \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}$$

ただし E は単位行列である。

これより次の諸式を得る。

$$\begin{cases} A_{11}\alpha_{11} + A_{12}\alpha_{21} = E \cdots\cdots (i) & \cdots\cdots \therefore \alpha_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}\alpha_{21} \cdots\cdots (i)' \\ A_{11}\alpha_{12} + A_{12}\alpha_{22} = O \cdots\cdots (ii) & \cdots\cdots \alpha_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}\alpha_{22} \cdots\cdots (ii)' \\ A_{21}\alpha_{12} + A_{22}\alpha_{22} = E \cdots\cdots (iii) & \end{cases}$$

(ii)′を(iii)に代入すれば　$(-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22})\alpha_{22} = E$

従って　$\alpha_{22}^{-1} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$　または　$\alpha_{22} = (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \cdots\cdots (iv)$

すなわち　$A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ を計算しその逆行列として α_{22} を求めるのであるがこれは二次の行列であるから逆行列の算出も容易である。α_{22} が求まれば(ii)′式により α_{12} が求まる。対称行列では α_{21} は α_{12} の転置行列として求まり最后に α_{11} を(i)′式により計算すれば逆行列が求められたことになる。

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 4.2 & 0.9 & & & & & 1.2 \\ 0.9 & 5.6 & 0.8 & & & & 1.1 \\ & 0.8 & 5.0 & 0.7 & & & 1.0 \\ & & 0.7 & 5.0 & 0.8 & & 1.0 \\ & & & 0.8 & 5.6 & 0.9 & 1.1 \\ & & & & 0.9 & 4.2 & 1.2 \\ \hline 1.2 & 1.1 & 1.0 & 1.0 & 1.1 & 1.2 & 4.4 \end{array}\right]$$

A_{11}　A_{12}　A_{21}　A_{22}

次にこの方法を対称構造の一層六スパンラーメンの場合の一数値例である左に示す行列に適用しよう。この場合は節点方程式の節点廻転角の係数を要素とする小行列 A_{11} はいわゆる三元方程式であって対称構造の場合は両対角線に対して対称な行列となり，その逆行列 A_{11}^{-1} は東大教授平井博士の鋼構造Ⅲ巻に連続梁の場合について明示された方法に準じて容易に求めることができる，またこの場合 A_{22} 従って α_{22} は単なる数であるから

$\alpha_{22} = 1/\alpha_{22}^{-1}$ となり α_{22}^{-1} より直ちに求められる，

すなわち，

$$A_{11}^{-1}=\frac{0.9^2\times0.8^2\times0.7}{12.038}\begin{bmatrix} 8.187 & -1.347 & 220 & -31.5 & 4.67 & -1 \\ & 1.347\times4.67-220\times4.67 & 31.5\times4.67-4.67\times4.67 & 4.67 & & \\ & & 220\times31.5-31.5\times31.5 & 4.67\times31.5 & -31.5 & \\ & & 31.5\times220-4.67\times220 & 220 & & \\ & & 4.67\times1.347-1.347 & & & \\ & & 8.187 & & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.2468 & -0.0406 & 0.0066 & -0.0010 & 0.0001 & -0.00003 \\ & 0.1895 & -0.0309 & 0.0044 & -0.0007 & 0.0001 \\ & & 0.2091 & -0.0300 & 0.0044 & -0.0010 \\ & & & 0.2091 & -0.0309 & 0.0066 \\ & & & & 0.1895 & -0.0406 \\ & & & & & 0.2468 \end{bmatrix}$$

（対称行列につき左半は記入省略）

ただし上記数値は記入の便宜上説明上必要の程度に止めてある．

結局　$A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}=3.177$　　$\therefore\ \alpha_{22}=1/3.177=0.3148$

他の算出はすべて行列の加減乗の演算の繰返しであるから紙面の都合上省略する．

次に多層多スパンラーメンの場合の例として三層二スパンを採り節点の番号を各層左より順次数えれば下の形の行列を得る．この場合は A_{11}^{-1} が直ちには求められないので A_{11} を点線で区分された正方小行列 B_{ik} よりなる大行列とみなし，A_{11}^{-1} の方もこれに対応する区分の小行列 β_{ik} よりなる大行列と考える．すなわち

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} (s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 & s_9 & t_1 & t_2 & t_3) \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & & a_{14} & & & & & & a_{1,10} & a_{1,11} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{25} & & & & & a_{2,10} & a_{2,11} & \\ B_{11} & a_{32} & a_{33} & B_{12} & & a_{36} & & & & a_{3,10} & a_{3,11} & \\ \hline a_{41} & & & a_{44} & a_{45} & & a_{47} & & & & a_{4,11} & a_{4,12} \\ & a_{52} & & a_{54} & a_{55} & a_{56} & & a_{58} & & & a_{5,11} & a_{5,12} \\ B_{21} & & a_{63} & B_{22} & a_{65} & a_{66} & B_{23} & & a_{69} & & a_{6,11} & a_{6,12} \\ \hline & & & a_{74} & & & a_{77} & a_{78} & & A_{12} & & a_{7,12} \\ & & & & a_{85} & & a_{87} & a_{88} & a_{89} & & & a_{8,12} \\ & & & B_{32} & & a_{96} & B_{33} & a_{98} & a_{99} & & & a_{9,12} \\ \hline a_{10,1} & a_{10,2} & a_{10,3} & & & & & & & a_{10,10} & & \\ a_{11,1} & a_{11,2} & a_{11,3} & a_{11,4} & a_{11,5} & a_{11,6} & & A_{21} & & & a_{11,11} & \\ & & & a_{12,4} & a_{12,5} & a_{12,6} & a_{12,7} & a_{12,8} & a_{12,9} & & A_{22} & a_{12,12} \end{array}\right] \end{array}$$

$$A_{11}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}\qquad A_{11}^{-1}=\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix}$$

とすれば行列の定義により次の式を得る．

$$\begin{cases} B_{11}\beta_{13}+B_{12}\beta_{23}=0 & \cdots\cdots\text{(i)} \\ B_{21}\beta_{11}+B_{22}\beta_{21}+B_{23}\beta_{31}=0 & \cdots\cdots\text{(ii)} \\ B_{21}\beta_{13}+B_{22}\beta_{23}+B_{23}\beta_{33}=0 & \cdots\cdots\text{(iii)} \\ B_{32}\beta_{21}+B_{33}\beta_{31}=0 & \cdots\cdots\text{(iv)} \\ B_{32}\beta_{22}+B_{33}\beta_{32}=0 & \cdots\cdots\text{(v)} \\ B_{32}\beta_{23}+B_{33}\beta_{33}=E & \cdots\cdots\text{(vi)} \end{cases}$$

(i)式より，$\beta_{23}=-B_{12}^{-1}B_{11}\beta_{13}$ ……(i)'　　(i)', (iii)式より，$\beta_{33}=-B_{23}^{-1}(B_{21}-B_{22}B_{12}^{-1}B_{11})\beta_{13}$

$B_{21}-B_{22}B_{12}^{-1}B_{11}$ は A_{11} が二次の大行列なる場合の逆行列の右上端に位置する小行列 β_{12} の逆行列に相当するものであるから　$B_{21}-B_{22}B_{12}^{-1}B_{11}=[\beta_{12}]_2^{-1}$　と書けば

$$\beta_{33}=-B_{23}^{-1}[\beta_{12}]_2^{-1}\beta_{13}\quad\cdots\cdots\text{(vii)}$$

(i)', (vii) を (vi) 式に代入すれば結局，$\beta_{13}^{-1}=-B_{32}B_{12}^{-1}B_{11}-B_{33}B_{23}^{-1}[\beta_{12}]_2^{-1}$ ……(viii)

(viii) 式を算出するために必要な逆行列の計算はすべて B_{ik} $(i\neq k)$ に対するもので，いずれも対角行列であるから容易に行い得る．(viii) 式により β_{13} を求めるには逆行列の計算を必要とする．β_{13} が求まれば (i)', (vii) 式より β_{23}, β_{33} が求まり以下 β_{12}, β_{22}, β_{11} 等が順次上の諸式より求まるがその際逆行列を求める必要のあるのは対角行列のみで済まされる．

かくて A_{11}^{-1} が求まれば逆行列 α_{ik} を求める以下の計算方法は最初に述べた通りである．

以上三層の場合を例としたが n 層であっても同様でまず逆行列の右上端の小行列 β_{1n}^{-1} を次式で求めその逆行列として β_{1n} を得る．$\beta_{1n}^{-1}=-B_{n,n-1}B_{n-2,n-1}^{-1}[\beta_{1,n-2}]_{n-2}^{-1}-B_{n,n}B_{n-1,n}^{-1}[\beta_{1,n-1}]_{n-1}^{-1}$