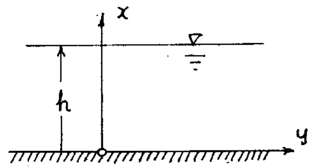
I—35　水中における棒の振動に関する一考察

神戸大学工学部　工博　畑中元弘
○杉本修一

近時益々橋が長大となりそれにともなって橋脚も深く且つ長くなってきている。橋脚の長さが長くなってくると橋脚の振動を考えるとき水がどのように影響してくるのだろうか。本文はこのような問題に対する一つの試みとして述べたものである。

第一の方法

この方法の考え方はまづ2次元で且つ上流側が無限に長い貯水池の壁が或る振動をしたときその壁に加わる動水圧を計算し，その水圧に比例する圧力が一端固定他端自由な断面一定の棒に圧力として加わるときの棒の振動としてその固有振動数を Galerkin 法で求めようとするものである。



振動時における水のポテンシャルを ϕ とすれば

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\frac{gK}{W_0}=\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

この方程式を

$$\left|-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad \left|\phi\right|_{x=h}=0,\quad \left|-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{y=0}=\sin\omega t\cdot f(x),\quad \left|-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{y=\infty}=0$$

なる條件のもとに解くと

$$\phi=\sin\omega t\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-k_n y}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2h}x,$$

こゝに

$$A_n=\frac{1}{k_n}\frac{2}{h}\int_0^h f(\lambda)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2h}\lambda\,d\lambda,\qquad k_n=\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4h^2}-\frac{W_0\omega^2}{gK^2},$$

振動時における動水圧 σ は

$$\sigma=\left|\frac{W_0}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{y=0}=\frac{W_0}{g}\omega\cos\omega t\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2h}x,$$

一方この σ の η 倍の圧力が作用するものとすればそのとき断面一定の棒の振動方程式は

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{W_0}{EI}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\eta\sigma$$

いま　$y=F(x)\cos\omega t$　とすれば上式は

$$\frac{d^4F}{dx^4}+\frac{W_0}{EI}\omega^2F=\eta\frac{W_0}{g}\frac{\omega^2}{EI}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k_n}\frac{2}{h}\int_0^h F(\lambda)\cos\frac{(2n+1)\pi}{2h}\lambda\,d\lambda\cos\frac{(2n+1)\pi}{2h}x,$$

こゝに

$$F(x)=\sum_{m=0}^{\infty}B_m\cos\frac{(2m+1)\pi}{2h}x$$

であるとしてこれを上式に代入すれば誤差 ε は

$$\mathcal{E}=\sum_{m=0}\left[B_m\left\{\frac{(2m+1)^4\pi^4}{(2h)^4}-\frac{w_0}{EI}\omega^2\right\}+\eta\frac{W_0}{g}\frac{\omega^2}{EI}\frac{1}{\sqrt{\frac{(2m+1)^2\pi^2}{(2h)^2}-\frac{W_0\omega^2}{gK}}}\sum_{i=0}B_i\right]\cos\frac{(2m+1)\pi}{2h}x$$

いま $F(x)$ を第3項まで採用しGalerkin 法を用いれば

$$\int_0^h \mathcal{E}\cos\frac{\pi}{2h}x\,dx=0,\quad \int_0^h \mathcal{E}\cos\frac{3\pi}{2h}x\,dx=0,\quad \int_0^h \mathcal{E}\cos\frac{5\pi}{2h}x\,dx=0,$$

すなわち

$$\begin{aligned} B_0a_{11} &+ B_1a_{12} + B_2a_{13} = 0\\ B_0a_{21} &+ B_1a_{22} + B_2a_{23} = 0\\ B_0a_{31} &+ B_1a_{32} + B\ a_{33} = 0 \end{aligned}$$

これより係数 B_0, B_1, B_2 を消去すれば

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

こゝに

$$a_{11}=\left(\frac{\pi}{2h}\right)^4+\left(\frac{W_0}{g}\frac{\eta}{EI}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2-\frac{W_0\omega^2}{gK}}}-\frac{w_0}{EI}\right)\omega^2,\quad a_{12}=\frac{W_0}{g}\frac{\eta}{EI}\frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2-\frac{W_0\omega^2}{gK}}},\quad a_{13}=a_{12},$$

$$a_{21}=\frac{W_0}{g}\frac{\eta}{EI}\frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\frac{3\pi}{2h}\right)^2-\frac{W_0\omega^2}{gK}}},\quad a_{22}=\left(\frac{3\pi}{2h}\right)^4+\left(\frac{W_0}{g}\frac{\eta}{EI}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3\pi}{2h}\right)^2-\frac{W_0\omega^2}{gK}}}-\frac{w_0}{EI}\right)\omega^2,\quad a_{23}=a_{21},$$

$$a_{31}=\frac{W_0}{g}\frac{\eta}{EI}\frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\frac{5\pi}{2h}\right)^2-\frac{W_0\omega^2}{gK}}},\quad a_{32}=a_{31};\quad a_{33}=\left(\frac{5\pi}{2h}\right)^4+\left(\frac{W_0}{g}\frac{\eta}{EI}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5\pi}{2h}\right)^2-\frac{W_0\omega^2}{gK}}}-\frac{w_0}{EI}\right)\omega^2,$$

である。この行列式より ω を求むればこれが固有円振動数である。

第2の方法

この方法の考え方は速度に比例する圧力が棒に作用するとしてその固有振動数を求めようとするものである。圧力の速度に対する比例常数を C_0 とすれば断面一定の棒に対する振動方程式は

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{w_0}{EI}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\frac{C_0}{EI}\frac{\partial y}{\partial t}$$

で与えられる。この方程式は周知の如く或る条件のもとにおいては振動するが，そうでないときには振動はしないのである。