

I-31 粘弾性体としての地山中の素掘円形トンネルの変形挙動について

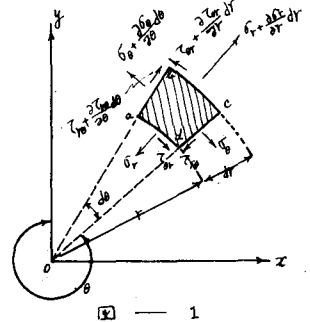
正員 徳島大学工学部 小田英一

軟弱なる地山中に粘土の如き地山中にトンネルを掘削したとき、トンネル周縁が時間と共に土圧によりトンネル内部にはすみ出してくることがよく経験されている。この現象は従来トンネル掘削により地山が外気に接触して膨張したかの如く言われているが、著者はこの現象はトンネルを地山に掘削したことにより地山の物体力のトンネル周辺の応力集中によつて土が掘削後即刻生ずるのでなくして、rheologyの立場から突明してこの変形挙動が解明されるのではないかという仮定で研究を進めた。即ち地山が粘土の如く粘弾性体とみなされるとき水平な地表面の下かなり深い所に掘削した素掘円形トンネル円孔及びその周辺変形形式を地山の応力を、時間関係式がVoigt型であるとして導いたのである。

1. 極座標による弾性体の平面問題

平面上の点の位置は座標原点O(図1)からの距離 r と、この r の方向とこの平面上に定位置を有する或る軸の y との間の角 θ とで定まる。動径方向の法線応力成分を σ_r 、接線方向の法線応力成分を σ_θ で表わす。接線応力としては $\tau_{r\theta}$ を用いる。その他の記号は図-1に示す。物体力の r 方向の成分を F_r 、 θ 方向の成分を F_θ とすれば、極座標による応力平衡式は次式となる。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 \quad (1)$$



半径及び接線方向における点の変位成分を夫々 u_r, u_θ とするならば、半径方向の変成分を e_{rr} 、接線方向の変成分を $e_{\theta\theta}$ 、剪断変成分を $e_{r\theta}$ とすれば

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad e_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \quad (2)$$

弾性係数を E 、ポアソン比を ν 、剪断弾性係数を G とすれば、Lame 常数は $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
 $\gamma = \frac{E}{2(1+\nu)}$ となる。 $\Delta = e_{\theta\theta} + e_{rr}$ を用いて次式が得られる。

$$\sigma_r = \lambda \Delta + 2\gamma e_{rr}, \quad \sigma_\theta = \lambda \Delta + 2\gamma e_{\theta\theta}, \quad \tau_{r\theta} = \gamma e_{r\theta} \quad (3)$$

(2),(3)式を(1)式に代入して $p = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} = (\lambda + \gamma)\Delta$ を用いて

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) &= \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} - F_r \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) &= \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial p}{\partial \theta} - F_\theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2. 粘弾性体の平面歪の問題

地山が粘土の如き粘弾性体より成立っているとき、この粘弾性体の equation of state は

$$P = 2\gamma e_\theta + 2\gamma_s \dot{e}_\theta \quad (5)$$

で表わされる。ただし歪の deviator を e_θ 、応力の deviator を P 、粘性係数を γ_s とする。この場合 r 方向に対して応力の deviator は $\sigma_r - P$ 、歪の deviator は $e_{rr} - \frac{1}{2}$ となり、 θ 方向に対して応力の deviator は $\sigma_\theta - P$ 、歪の deviator は $e_{\theta\theta} - \frac{1}{2}$ となる。これを(5)式に適用すれば次式が得られる。ただし剪断応力、剪断歪に対しては(5)式の形を適用するには $e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)$ として $\tau_{r\theta} = 2\gamma e_{r\theta} + 2\gamma_s \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial t}$ となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= p + \gamma \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \right) + \gamma_s \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \right) \\ \sigma_\theta &= p + \gamma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \gamma_s \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \\ \tau_{r\theta} &= \gamma \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \gamma_s \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

(6)式を(1)式に代入して

$$\left. \begin{aligned} \gamma \left\{ \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right) \right\} + \gamma_s \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right) \right\} &= -\frac{\partial p}{\partial r} - F_r \\ \gamma \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \right) \right\} + \gamma_s \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \right) \right\} &= -\frac{\partial p}{\partial \theta} - F_\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$t=0$ のとき $u_r=0$, $u_\theta=0$ の条件を用いて(7)式の解を求めれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right) &= -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial r} + F_r \right) \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma_s} t\right) \right\} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \right) &= -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} + F_\theta \right) \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma_s} t\right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

(8)式と(4)式とを比較対照するとき $t=\infty$ のときは(8)式と(4)式とは同一となる。故に $t=\infty$ のときは弾性論より求めた変位に終局的になることが判る。(8)式に於て変数を分離して

$u_r = U_r T$, $u_\theta = U_\theta T$ と仮定することができる。ただし U_r, U_θ は時間に無関係な r, θ の函数であり, T は時間函数である。このことより

$$u_r = (u_r)_{el.} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma_s} t\right) \right\} \quad u_\theta = (u_\theta)_{el.} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma_s} t\right) \right\}$$

とすることが出来る。ただし $(u_r)_{el.}, (u_\theta)_{el.}$ は夫々弾性論より計算した u_r, u_θ の値である。

3. 粘弾性体としての地山中の素掘円形トンネルの u_r, u_θ の値

図-2において地山の単位体積当りの重量を γg , 水平地表面より円孔中心迄の深さを x_0 , トンネル円孔半径を a とすれば

$$K = \frac{\lambda + 3\gamma}{4\gamma(\lambda + \gamma)}, \quad \lambda = \frac{2\gamma\gamma'}{1-2\gamma'} \quad \text{となり, } W = \gamma g x_0, \quad V = \gamma g a \quad \text{とし}$$

て水平な地表面を有する粘弾性体としての地山中かなり深い所に素掘円形トンネルを掘削したとき, このトンネル周辺の變形挙動は図-2に示す座標により次式で与えられる。

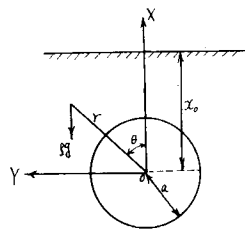


図 - 2

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \left[-\frac{1}{4\gamma} W \left(1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \left(\frac{a}{r} \right) a + \left\{ -\left(\frac{V}{4} \frac{\gamma}{1-\gamma} + \frac{V}{16\gamma} \frac{3-4\gamma'}{1-\gamma'} \right) a \left(\frac{1}{2} + \log r \right) + \frac{V}{16\gamma} \frac{1}{1-\gamma} a \right\} \cos \theta \right. \\ &\quad + \left\{ -2 W K \left(1 - \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \left(\frac{a}{r} \right) a - \frac{W}{4\gamma} \left(1 - \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 r + \frac{W}{4\gamma} \left(1 - \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 a \right\} \cos 2\theta \\ &\quad + \left\{ \frac{V K}{2} \left(1 - \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 a + \frac{V}{8\gamma} \left(1 - \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 r - \frac{V}{8\gamma} \left(1 - \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 a \right\} \cos 3\theta \left. \right\} \\ &\quad \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma_s} t\right) \right\} \\ u_\theta &= \left[\left\{ \left(\frac{V}{16\gamma} \frac{3-4\gamma'}{1-\gamma'} + \frac{V}{4} \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) a \left(\frac{1}{2} + \log r \right) + \frac{V}{16\gamma} \frac{1}{1-\gamma} a \right\} \sin \theta \right. \\ &\quad + \left\{ 2 W K \left(1 - \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \left(\frac{a}{r} \right) a - \frac{W}{4\gamma} \left(1 - \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 a + \frac{W}{4\gamma} \left(1 - \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 a \right\} \sin 2\theta \\ &\quad + \left\{ -\frac{V K}{2} \left(1 - \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 a + \frac{V}{8\gamma} \left(1 - \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 r - \frac{V}{8\gamma} \left(1 - \frac{\gamma}{1-\gamma} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 a \right\} \sin 3\theta \left. \right\} \\ &\quad \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma_s} t\right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし(9)式における $(u_r)_{el.}, (u_\theta)_{el.}$ は水平な地表面を有する弾性体としての地山中の素掘円形トンネル周辺の弾性変位である。

文 献

- (1) 小田英一：巻立なき円形隧道の変位について，広島大学工学部研究報告才1号