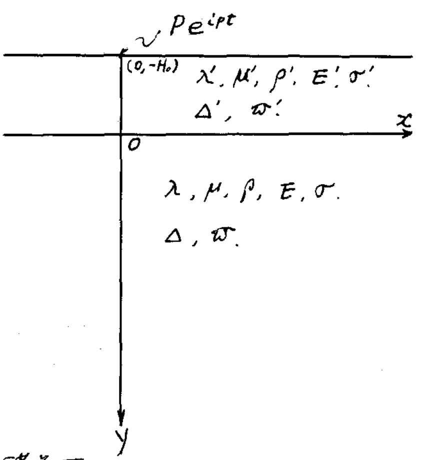
I —30　有層彈性体の伝播波について

信州大學工學部　正会員　　夏目正太郎

彈性体の一部に急に擾乱が與えられる時には，この擾乱が一般に次々に遠方へ伝えられて行く。すなわち彈性波の現象が起る。地震波動の解析としてこの種の問題は古くから研究され，幾多の成果が発表されてきている。Rayleigh の発表せる表面波があり，Love は Rayleigh 波の欠点を解決すべく，表面層を考えて一種の表面波を計算された。わが國でもこれらと類似の問題を妹沢博士その他の方々の手によつて，いろいろと詳しく調べられた研究成果がある。これらの論文は，表面層をもつている彈性体の接触部における連続の條件が，不充分ではなかろうかと思われる節がある。

一般に異る彈性体系が接触しているとき，接触部の連続條件は，靜力學的な釣合いの場合も，動力學的な彈性波の場合も，接触面で離れがおきない場合に問題を限定すれば，接触面上にあらわれる應力成分は互いに相等しくなければならぬ。また変位成分のうち，接触面に垂直な変位は相等しくなければならぬが，残る切線変位も常に相等しくなければならぬという論據はどこにもない。そこで，この切線変位は一應任意の喰違いを起しうるとしておいて，この喰違いの値を全体系のひずみエネルギーが極小になる，すなわちもつと安定なエネルギー状態に落付くべきであるとしてこの喰違いの値を計算することが出来ることになる。この樣な考え方をして計算すると一般に切線変位差は0にならない。以前靜力學的例題で，円形ボルトや同心環のはまつた板の引張り問題の計算を行つた結果は，いずれも無視出来ぬ危険側に應力分布を與える樣な値となつた。今回はこれと同じ考え方を表面層と彈性体との接触部に適用した結果その喰違いの値が表面層の厚さの函数として求められることがわかり，若干の計算をしてみた。



図の樣な体系とし，表面層に関する記号には′を附することにし，Y軸は下向きに正号をとらせる。今，表面の$(0, -H_0)$にPe^{ipt}なる振動があるとする。

一般に重力の作用する場において，運動の方程式は

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta + \mu\nabla^2(U, V) + \rho(0, -g) = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(U, V). \quad \text{——(1)}$$

これを書きかえると

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2\Delta = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta, \quad \mu\nabla^2\varpi = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta. \quad \text{——(2)}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}, \quad 2\varpi = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}.$$

(2)式をこの体系に適用するとき，次の式がそれぞれ(2)式を滿足する。

下部彈性体に対しては

$$\Delta = A\,e^{i(pt-fx)-ry}, \quad 2\varpi = B\,e^{i(pt-fx)-sy}. \quad \text{——(3)}$$

上部表面層に対しては

$$\Delta' = (C\cosh r'y + D\sinh r'y)\,e^{i(pt-fx)}, \quad 2\varpi' = (E\cos s'y + F\sin s'y)\,e^{i(pt-fx)} \qquad (4)$$

ただし, $r^2=f^2-h^2$, $s^2=f^2-k^2$, $r'^2=f^2-h'^2$, $s'^2=f^2-k'^2$, $h^2=\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu}$, $k^2=\frac{\rho p^2}{\mu}$, $h'^2=\frac{\rho' p^2}{\lambda'+2\mu'}$, $k'^2=\frac{\rho' p^2}{\mu'}$ である。

$\varpi=0$ なる Δ を満足する解は

$$U_1 = \frac{if}{h^2} A e^{-ry} e^{i(pt-fx)} \qquad V_1 = \frac{r}{h^2} A e^{-ry}\cdot e^{i(pt-fx)} + \frac{\rho g}{2(\lambda+2\mu)} y^2 \qquad (5)$$

$\Delta=0$ なる ϖ を与える解は

$$U_2 = -\frac{s}{k^2} B e^{-sy} e^{i(pt-fx)}, \quad V_2 = \frac{if}{k^2} B\cdot e^{-sy}\cdot e^{i(pt-fx)} + \frac{\rho g}{2\mu} x^2. \qquad (6)$$

同様にして, $\varpi'=0$ なる Δ' を満足するもの, $\Delta'=0$ なる ϖ' を与える解はそれぞれ

$$\left.\begin{array}{l} U_1' = \frac{if}{h'^2}(C\cosh r'y + D\sinh r'y)\,e^{i(pt-fx)}, \quad V_1' = -\frac{r'}{h'^2}(C\sinh r'y + D\cosh r'y)\,e^{i(pt-fx)} + \frac{\rho' g}{2(\lambda'+2\mu')} y^2 \\ U_2' = -\frac{s'}{k'^2}(E\sin s'y - F\cos s'y)\,e^{i(pt-fx)}, \quad V_2' = \frac{if}{k'^2}(E\cos s'y + F\sin s'y)\,e^{i(pt-fx)} + \frac{\rho' g}{2\mu'} x^2. \end{array}\right\} \quad (7)$$

$U=U_1+U_2$, $V=V_1+V_2$, $U'=U_1'+U_2'$, $V'=V_1'+V_2'$ となり, 応力をふくむ式は

$$\widehat{xx} = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \widehat{yy} = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \widehat{xy} = \mu\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right), \cdots\cdots \qquad (8)$$

等であらわされる。ここで境界条件を書けば

$$\left.\begin{array}{l} (0, -H_0)\ \text{で}\ \ \widehat{xy}' = Pe^{ipt}, \quad \widehat{yy}' = Pe^{ipt} \\ (x, 0)\ \text{で}\ \ \widehat{xy} = \widehat{xy}', \quad \widehat{yy} = \widehat{yy}', \quad V = V', \quad U = U' + \mho e^{i(pt-fx)} \end{array}\right\} \qquad (9)$$

(9)式を解くことにより, 未定係数 A, B, C, D, E, F が $\mho$ を含む式で表わされる。切線変位差 $\mho$ を定めるのにひずみエネルギー極小の条件を用いる。すなわち

$$\frac{\partial W}{\partial \mho} = \frac{\partial}{\partial \mho}\Big[\frac{1}{2E}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\{\widehat{xx}^2 + \widehat{yy}^2 - 2\sigma\,\widehat{xx}\cdot\widehat{yy} + 2(1+\sigma)\widehat{xy}^2\}\,dx\,dy$$

$$+ \frac{1}{2E'}\int_{-H_0}^0\int_{-\infty}^\infty\{\widehat{xx}'^2 + \widehat{yy}'^2 - 2\sigma'\,\widehat{xx}'\cdot\widehat{yy}' + 2(1+\sigma')\widehat{xy}'^2\}\,dx\cdot dy\Big] = 0 \qquad (10)$$

これらから得られる解は波の伝播速度, 波長, 層の厚さ, 弾性常数等の間の関係が知れるわけであり, 式の内容が非常に複雑で簡単には説明し難いが, 主として伝播速度や波長と層の厚さとの関係並びに $\mho$ の影響の程度を数値的にあらわす。特に $\mho$ が層の厚さの函数であり, 或る厚さ以上になると大体その値が一定値に落着く様に思われる。この $\mho$ の存在を認めることにより従来見られなかった波が計算されるものと確信する。