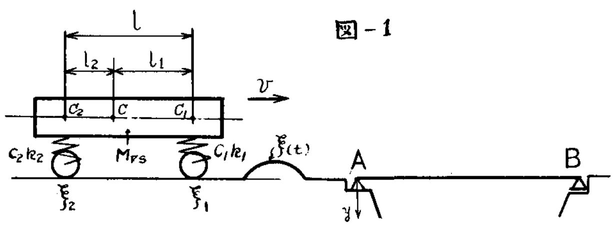
Ⅰ－26　橋桁の自動車荷重による振動性状について

京都大学工学部　工博　正員　小西一郎
○　神戸市建設局　　　準員　小堀為雄

1. 緒言　橋の振動については，従来，衝撃係数の決定と言った面から多くの研究がなされている。本研究では，主として道路橋について走行自動車による橋の振動性状および，連行荷重による橋の衝撃について考察する。

2. 凹凸のある鋪装面上を走行する自動車の振動　走行自動車の振動を図－1のように，バネ上荷重M_{rs}の重心Cの上下変位z，および回転角φで表わされる2自由度系と仮定する（後節の便宜上z，φをC_1，C_2点の上下変位z_1，z_2に変換する）。このとき，自動車の運動方程式は，



図－1

$$
\left.\begin{aligned}
&M_{rs}\ddot{z}+c_1\dot{\Delta}_1+c_2\dot{\Delta}_2+k_1\Delta_1+k_2\Delta_2=0\\
&M_{rs}i^2\ddot{\varphi}+c_1l_1\dot{\Delta}_1+c_2l_2\dot{\Delta}_2+k_1l_1\Delta_1+k_2l_2\Delta_2=0\\
&\text{ここに，}\quad \Delta_1=z+l_1\varphi-\xi_{1(t)}=z_1-\xi_{1(t)}\\
&\qquad\qquad \Delta_2=z-l_2\varphi-\xi_{2(t)}=z_2-\xi_{2(t)}
\end{aligned}\right\}(1)
$$

いま，自動車の速度が相当大きく，障害物を乗り越える時間が自動車の振動周期にくらべて非常に小さいものとする。これは自動車が普通の速度30～50km/hr走行していて小さい障害物を減速しないで乗り越える場合に相当する。また車輪は地面から離れないものとする。さて，前輪が障害物を乗り越えることにより，バネに与えられる衝撃U_1は

$U_1=\int_{t_1}^{t_2}\xi_{1(t)}k_1\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\xi_1}{dt}c_1\,dt$　　(2)，　(t_2-t_1)は前輪が障害物を乗り越えるに要する時間である。この場合後部バネの影響は小さいものとして省略する。いま，(2)式の第二項はc_1を定数として，　$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\xi_1}{dt}c_1\,dt=c_1\int_{t_1}^{t_2}d\xi_1=c_1\left(\xi_{1(t)}\right)_{t_1}^{t_2}=0$　　(3)　　従って，式(2)は，

$U_1=k_1\int_{t_1}^{t_2}\xi_{1(t)}\,dt$　　(4)　　この衝撃によりC_1，C_2は上方に，

$\dot{z}_1=\left(\frac{1}{M_{rs}}+\frac{l_1^2}{M_{rs}i^2}\right)U_1$　　　$\dot{z}_2=\left(\frac{1}{M_{rs}}-\frac{l_1l_2}{M_{rs}i^2}\right)U_1$　　(4)

なる初速度が与えられる。いま，われわれは障害物を乗り越えた後の自動車の振動を問題としているから，式(1)の外力に相当する項，すなわち，右辺を0とおいた自由振動方程式を解いて，その初期条件として式(4)の値を用いて解けばよい。このときは，式(1)の解は，

$$
\left.\begin{aligned}
z_1&=a\{\xi_bA-B\}\{U_1\cos[r_1(t_0+t)+\tfrac{\pi}{2}]+U_2\cos(r_1t+\tfrac{\pi}{2})\}+b\{\xi_aA-B\}\{U_1\cos[r_2(t_0+t)+\tfrac{\pi}{2}]+U_2\cos(r_2t+\tfrac{\pi}{2})\}\\
z_2&=\xi_a a\{\xi_bA-B\}\{U_1\cos[r_1(t_0+t)+\tfrac{\pi}{2}]+U_2\cos(r_1t+\tfrac{\pi}{2})\}+\xi_b b\{\xi_aA-B\}\{U_1\cos[r_2(t_0+t)+\tfrac{\pi}{2}]+U_2\cos(r_2t+\tfrac{\pi}{2})\}\\
&\text{ここに，}\quad a=\frac{1}{(\xi_b-\xi_a)r_1},\quad b=\frac{1}{(\xi_a-\xi_b)r_2},\quad A=\left(\frac{1}{M_{rs}}+\frac{l_1^2}{M_{rs}i^2}\right),\quad B=\left(\frac{1}{M_{rs}}-\frac{l_1l_2}{M_{rs}i^2}\right),\quad t_0=\frac{l}{v}
\end{aligned}\right\}(5)
$$

ここにtは後輪が障害物を乗り越えた直後を$t=0$とする。

3. 走行自動車と橋桁との連成振動　前節のように2自由度系と仮定した自動車が橋上を走行する場合の橋桁と自動車の連成振動について考察する。一般に，橋桁の運動方程式はエネルギ式をLagrangeの運動方程式に代入して求めることができる。ここでは橋の撓み曲線を$y=y_c\sin p_0t$と仮定する。このときは，自動車の前輪が橋桁支点Aを通過して後輪が

A点に達するまでの間における橋桁と自動車の振動方程式は，

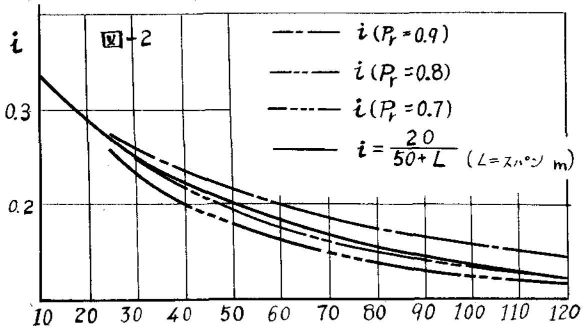
$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{y}_c + 2h\dot{y}_c + p_B^2 y_c = C_1\left[g + H_1\{z_1 - y_c \sin pt\}\right]\sin pt \\
&l_2\ddot{z}_1 + l_1\ddot{z}_2 + \frac{k_1 l}{M_{vs}} z_1 + \frac{k_2 l}{M_{vs}} z_2 = \frac{k_1 l}{M_{vs}} y_c \sin pt, \qquad C_1 = \frac{2M_{v1}}{M_B} \\
&\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2 + \frac{k_1 l_1 l}{I} z_1 - \frac{k_2 l_2 l}{I} z_2 = \frac{k_1 l_1 l}{I} y_c \sin pt, \qquad H_1 = \frac{k_{v1}}{M_{v1}}
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

さらに，後輪がA点を通過後については，同様に，

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{y}_c + 2h\dot{y}_c + p_B^2 y_c = C_1\left[g + H_1\{z_1 - y_c \sin p(t_0+t)\}\right]\sin p(t_0+t) + C_2\left[g + H_2\{z_2 - y_c \sin pt\}\right]\sin pt \\
&l_2\ddot{z}_1 + l_1\ddot{z}_2 + \frac{k_1 l}{M_{vs}} z_1 + \frac{k_2 l}{M_{vs}} z_2 = \frac{k_1 l}{M_{vs}} y_c \sin p(t_0+t) + \frac{k_2 l}{M_{vs}} y_c \sin pt \\
&\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2 + \frac{k_1 l_1 l}{M_{vs} i^2} z_1 - \frac{k_2 l_2 l}{M_{vs} i^2} z_2 = \frac{k_1 l_1 l}{M_{vs} i^2} y_c \sin p(t_0+t) - \frac{k_2 l_2 l}{M_{vs} i^2} y_c \sin pt
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

となる。ただしこの場合は後輪がA点を通過した時刻を $t=0$ とする。

以上式(6),(7)は三元連立微分方程式であってこの解を求めることはむずかしいので，ここでは，Runge-Kutta法により数値計算を行った。ただし，初期条件として，取付道路舗装面上に凹凸があるものとして，橋に自動車が達する以前にすでに相当の振動があったものとして，前節で求めた結果を用いた。



4. 衝撃係数に関する確率論的一考察

橋に周期力をもついくつかの荷重が載荷される場合，橋の振動はそれぞれ個個の振動の合成振動として表わされる。ここで問題となるのは，それぞれ個個の振動の位相差の大小によって橋の合成振動の振動性状が異なることである。ここでは橋に作用する自動車の種種の条件によって，この位相差は，まったく at random であることに注目して，この位相差を確率変数と考え，確率論の立場より，衝撃係数が橋の載荷長によって逓減されることについて考察する。さて，いくつかの周期力 $P\sin(\omega t+\delta_i)$ が橋に載荷されるときの橋桁スパン中央断面の合成振動の動撓みは一般に，

$y_{cn} = \delta_{st}\frac{1}{\sqrt{\ }}\sum a_i \sin(\omega t+\varphi_i)$　　$a_i = \sin\frac{\pi c_i}{L}$，$c_i$ は支点Aより荷重載荷点までの距離，L はスパン長，この位相差 φ_i はまったく at random である。いまこの位相差 φ_i を確率変数と考え，r を次のように定義する　$\sum a_i \sin(\omega t+\varphi_i) = r_i \sin(\omega t+\theta)$　ここに $|\mathfrak{a}_i| = a_i$，$\arg.\mathfrak{a}_i = (\omega t+\varphi_i)$ である。いま，$\mathfrak{a}_i$ の和を R_i とする。よって任意の r より r_i が小さい確率 $P_r(r_i<r)$ を求めれば，これはまた，橋桁スパン中央断面の最大撓み $\max y_{cn}$ 任意の $\max y_c$ より小さい確率となる。ここでは，確率をもとめる為に Pearson の酔歩の問題に対する Kluyver の式を用いた。

5. 結び　以上の結果を簡単にまとめると，(1) 自動車の振動を一自由度系と仮定した場合は，振動的に規則的であるが，2自由度系とすると加振力そのものが不規則となり一般に小さくなる。(2) 取付道路の凹凸がはげしく，自動車が橋に達する以前に相当の振動があるときは，衝撃係数は大きい。(3) 走行自動車一台による衝撃は最悪の場合相当大きいが2以上の連行荷重による衝撃は小さい。(4) 第4節のように，確率論の立場から衝撃係数が載荷長によって逓減することの根拠の一つが明らかとなった。なお，本研究は，昭和32年度文部省科学研究費による総合研究の一部として行ったものである。