

I-25 下水汚泥の流動機構について

大阪工業大学土木教室 正員 川島 普

1. 緒 言

さきに挟り振子による試験装置を用いて下水汚泥の物性はその含水率に依りて極めて広い範囲に変化することと指摘した。これに基づいて、塑性体についての Heinrich Hencky の運動方程式に弾性体としての要素を導入し、とくに低含水率の汚泥が粘性、塑性、弾性流動を示す場合の流動機構を考察した。応用例として汚泥の管路輸送について解析して在来の Poiseuille 式と比較したのでこれについて報告する。

2. 下水汚泥の物性と流動

速度勾配 D と剪断応力 τ との関係は一般に非 Bingham 体では $D = \varphi(\tau)$, $\tau \leq \tau_y$ で $\varphi(\tau) = 0$, τ_y = 剪断降伏値で表わされる。下水汚泥の挟り振子による実験結果はすでに報告したが、 $\tau_y - \tau_{y+1}$ 図を画き $D - \tau$ 図で考察すると次のようである。含水率の極めて高い (99% 以上) では汚泥は Newton 体としての水に近い挙動を示し、 $D - \tau$ 図では原点を通る直線となる。含水率が減少すると粘性係数 η , 剪断弾性係数 G が次第に増し、振中の小さい場合は $Wale-Ostwald$ の $D = \frac{1}{\eta} \tau^n$, $n < 1$ の場合に近くなり、振中の大きい場合は直線として示されるようである。さらに含水率が下り 94% までいざとなると急激に汚泥内の凝集力が増し、塑性体としての τ_y を考慮せねばならなくなるので、 $D - \tau$ 図では原点を外れほぼ Bingham 体に近い挙動を示すようである。ついで含水率が 90% 以下になるとこうした性質がさらに増して非 Bingham 体の挙動を示すようになる。以上を總括し、下水汚泥の剪断応力は

$$D = \frac{1}{\eta} (\tau - \tau_y - G\dot{\gamma})^n, \quad n \leq 1 \quad (1)$$

$$\tau = (D\eta)^{\frac{1}{n}} + \tau_y + G\dot{\gamma}$$

変形の大きい範囲で $n = 1$ とおいて

$$\tau = D\eta + \tau_y + G\dot{\gamma} \quad (2)$$

としたい。さらに、固体と流体の変形について、流体の変形は極めて大きい、微小時間内の変形は固体と全様に取り扱うことができ、固体の場合の変形に流体の変形速度が対等し、速度勾配は変形速度の 1/2 種であるのでこれを用いると、微小時間について式(2)は

$$\tau = D\eta + \tau_y + G \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (3)$$

となり、式(3)の $\partial \gamma / \partial t$ を速度勾配におきかえることができる。

3. 下水汚泥の運動方程式

汚泥内の応力は汚泥相互の運動状態によつてきまるものと、汚泥相互のすべりがなくなる限界を規定する降伏応力との和であることと式(3)は示しているので、前者を歪速度に比例する応力 p_{ij}^v と、歪に比例する応力 p_{ij}^e , 後者を降伏応力 p_{ij}^p とおいて式(3)を一般化し

$$p_{ij} = p_{ij}^v + p_{ij}^e + p_{ij}^p \quad (4)$$

とし、汚泥を等方性、非圧縮性として、 $i, j = x, y, z$; $i, j = x, y, z$, $i \neq j$, p = 直圧

力として

$$\left. \begin{aligned} p_{ii}^v &= 2\gamma e_{ii} = 2\gamma \frac{\partial u_i}{\partial i} & p_{ij}^v &= \gamma e_{ij} = \gamma \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \\ p_{ii}^e &= 2G e_{ii} & p_{ij}^e &= G e_{ij} \\ p_{ii}^p &= -p + 2\lambda e_{ii} & p_{ij}^p &= \lambda e_{ij} \end{aligned} \right\} (5)$$

ここで入は定数でなく、汚泥が相互にすべりをおこす限界の条件で定まる変数で、在りてあらわすことができる。式(5)と加速度を受けている直角座標内の変形物体の応力の釣合式に代入して整理すると、運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + 2e_{xx} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + e_{xy} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + e_{xz} \frac{\partial \lambda}{\partial z} + (\gamma + G + \lambda) \nabla^2 u \\ \rho \frac{dv}{dt} &= \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + e_{yx} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2e_{yy} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + e_{yz} \frac{\partial \lambda}{\partial z} + (\gamma + G + \lambda) \nabla^2 v \\ \rho \frac{dw}{dt} &= \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + e_{zx} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + e_{zy} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + 2e_{zz} \frac{\partial \lambda}{\partial z} + (\gamma + G + \lambda) \nabla^2 w \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ここで、 $u, v, w; X, Y, Z$ は x, y, z 方向の速度及び外力、 ρ は密度である。

4. 管内流動への応用

水平と角 θ (下向き) をなす管で x 軸と管軸にとりその方向に流れがあるとし、定常状態で層流とすると運動方程式は式(6)から

$$\left. \begin{aligned} -\rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + (\gamma + G + \lambda) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial z} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \lambda}{\partial y} &= 0, \quad -\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} (7)$$

$\lambda = T_g / \frac{du}{dr}$, $r^2 = y^2 + z^2$ を用いて、栓流としての境界条件を用いて解いた結果は

$$\text{流速 } u = \frac{1}{(\gamma + G)} \left\{ \left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin \theta \right) (R^2 - r^2) + 2 T_g (R - r) + r_g \left[\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin \theta \right) r_g + 2 T_g \right] \log \frac{R}{r} \right\} \quad (8)$$

ただし $r_g < r$ であり、 $r_g \geq r$ では $u = 1$ 定。比栓半径 $r_g/R = \beta$ として

$$\text{流量 } Q = \frac{\pi (1 - \beta)^2 D^3}{64 (\gamma + G)} \left\{ \left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin \theta \right) (1 + \beta)^2 \frac{D}{2} + \frac{8 (\beta + 2)}{3} T_g \right\} \quad (9)$$

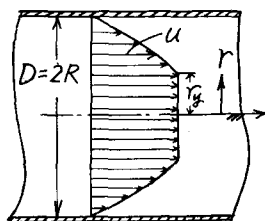
管内摩擦損失水頭は

$$\Delta h = 32 \left\{ \frac{(\gamma + G)}{\rho g} \frac{l \bar{u}}{(1 - \beta^2)^2 D^2} - \left(\frac{T_g}{\rho g} \right) \frac{(\beta + 2) l}{6 (1 + \beta)^2 D} + \frac{l}{32} \sin \theta \right\} \quad (10)$$

管壁における剪断力 τ_0 は

$$\tau_0 = - \frac{(\gamma + G)}{(1 - \beta^2)} \left(\frac{8 \bar{u}}{D} \right) + \frac{4}{3} T_g \left(\frac{2\beta^2 - \beta + 5}{4(1 + \beta)} \right) \quad (11)$$

ただし、 τ は負号。



以上の諸式と従来の Poiseuille 式と比較すると、とくに式(10)、(11)についてみると、比栓半径 β の関数で示される補正係数がついており、さらに剪断弾性係数 G が粘性項に追加され、式(10)では外力の項として重力の分力が管設置角度の影響を表わしている。この理論を用い汚泥濃度と排泥所要動力の関係を求め合理的な排泥装置設計への応用を試みたいと思っている。なお実験的に上記理論を検討し、とくに β の数値を決定したい。