IV－36　**定常熱伝導によるPipe Coolingの解法**

東京都水道局
小河内貯水池建設事務所　正会員　近藤邦二

1. 基本式

1本の*cooling pipe*の冷却する範囲は，この*pipe*（半径 r_1）を中心とする一定距離（半径 r_2）の円筒形と考える。そして $r=r_1$ および $r_1=r_2$ 温度をそれぞれ θ_1；θ_2 として熱伝導の定常状態の方程式は，つぎのようになる。

$$\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta}{dr}=0 \qquad \begin{cases} r=r_1 \ \text{にて} \ \theta=\theta_1 \\ r=r_2 \ \text{にて} \ \theta=\theta_2 \end{cases}$$

これを解くと

$$\theta=\theta_1-\frac{\ln r-\ln r_1}{\ln r_2-\ln r_1}(\theta_1-\theta_2) \quad \text{-------------------------} \quad (1)$$

円筒内コンクリートの平均温度を求めると

$$\theta_{mean}=\frac{1}{n(r_2^2-r_1^2)}\int_{r_1}^{r_2}\alpha\pi r\theta dr$$

$$=\alpha\ \theta_2$$

$$\alpha=\frac{1}{(r_2^2-r_1^2)\ln\frac{r_2}{r_1}}\left\{r_2^2\left(\ln\frac{r_2}{r_1}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}r_1^2\right\} \quad \text{-------------} \quad (2)$$

内壁よりの流出熱量は，L＝管長，K＝熱伝導率，Q＝流出熱量，T＝時間 $F=2\pi r_1 L$ とすれば

$$Q=KF\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_{r=r_1}=K\cdot 2\pi r_1 L\frac{\theta_2-\theta_1}{r_1(\ln r_2-\ln r_1)}T$$

$$=\frac{\theta_2 \quad \theta_1}{\frac{1}{K}\frac{1}{2\pi}(\ln r_2-\ln r_1)}T=\frac{\theta_2 \quad \theta_1}{r_2}T \qquad \text{ただし}\ r_c=\frac{1}{K}\frac{1}{2\pi}(\ln r_2-\ln r_1) \quad \text{-------} \quad (3)$$

外壁の温度 θ_2 はT時間后に θ_2' となるとし，今 θ_{mean} と θ'_{mean} の中間で定常状態を考えれば，T 時間中の熱の流出 Q は，C＝比熱　ρ＝密度　k＝温度拡散率

$$\theta=(\theta_{mean}-\theta'_{mean})\pi(r_2^2-r_1^2)c\rho \fallingdotseq \alpha(\theta_2-\theta_2')\pi r_2^2 c\rho$$

$$\alpha(\theta_2-\theta_2')\pi r_2^2 c\rho=\left(\frac{\theta_2+\theta_2'}{2}-\theta_1\right)\frac{T}{r_c}$$

$\theta_1=0$ とすれば

$$\theta_2'=\frac{2S-T}{2S+T}\theta_2=\beta\theta_2 \quad \text{-----------------------------} \quad (4)$$

$$\text{ただし}\quad \beta=\frac{2S-T}{2S+T} \qquad S=\frac{1}{2}\frac{r^2}{k}(\ln r_2-\ln r_1) \qquad k=\frac{K}{c\rho}$$

Tを1日と考えれば，最初の日　θ_2

1日后　$\theta_2' = \beta\theta_2$

2日后　$\theta_2'' = \beta\theta_2' = \beta^2\theta_2$

3日后　$\theta_2''' = \beta\theta_2'' = \beta^3\theta_2$

⋮

n日后　$\theta_2^n = \beta\theta_2^{n-1} = \beta^n\theta_2$ ---------------------- (5)

上式は Semi-log 方眼紙で表わせば，直線で表わすことができる。

2. 熱発生を伴う場合

$\Delta\theta$をT時間中におけるコンクリートの断熱温度上昇とし，その時間中の冷却を近似的に次のように考える。

冷却温度 $= (\theta_{mean} + \Delta t) - \theta'_{mean}$

$\frac{1}{2}(\theta_2 + \Delta\theta + \theta_2')$ で定常状態を考える。

前と同様にして

$$(\theta_{mean} + \Delta\theta - \theta'_{mean})\pi r_2^2 c\rho = (\alpha\theta_2 + \Delta\theta - \alpha\theta_2')\pi r_2^2 c\rho$$

$$(\alpha\theta_2 + \Delta\theta - \alpha\theta_2')\pi r_2^2 c\rho = \left(\frac{\theta_2 + \Delta\theta + \theta_2'}{2} - \theta_1\right)\frac{T}{r_c}$$

$\theta_1 = 0$ として

$$\theta' = \frac{2S - T}{2S + T}\theta_2 + \frac{\frac{2S}{\alpha} - T}{2S - T}\Delta\theta \quad \text{---------------------- (6)}$$

$$\theta' = \beta\theta_2 + \beta_\alpha\Delta\theta$$

$$\beta = \frac{2S - T}{2S + T} \qquad \beta_\alpha = \frac{\frac{2S}{\alpha} - T}{2S + T}$$

3. Cooling water の温度上昇

管長dxにおける Cooling water の温度上昇をdyとすれば

$f(x) =$ コンクリートの温度　$y =$ 冷却水の温度　$q =$ 冷却水の流量

$$q\,dy = \frac{1}{r_c}(f(x) - y)\,dx \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{q r_c}(f(x) - y)$$

これを$x = 0$にて$y = u_1$の条件で解けば

$$y = Re^{-Rx}\int_0^x f(x)e^{Rx}dx + u_1 e^{-Rx} \qquad \text{ただし } R = \frac{1}{q r_c} \quad \text{-------------- (7)}$$

(a) $f(x) = const$ で θ_0で表わされ，$u_1 = 0$なる場合

$$y = \theta_0(1 - e^{-Rx}) \quad \text{---------------------- (8)}$$

(b) $f(x) = a + bx$で表わされ，$u_1 = 0$なる場合

$$y = a + b\frac{Rx - 1}{R} - \left(a - b\frac{1}{R}\right)e^{-Rx} \quad \text{---------------------- (9)}$$