IV－7　底面曲率の変化する開水路上の不等速定流の一近似解法

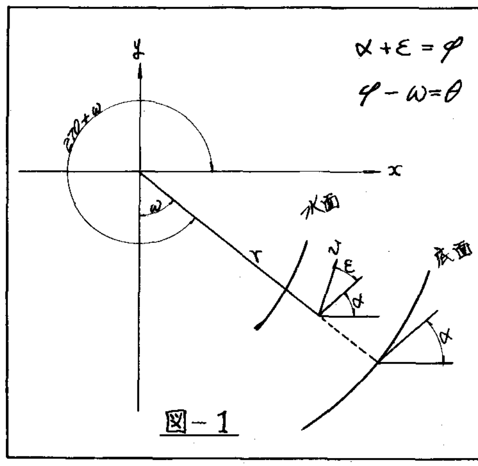
建設省土木研究所　正員　永玉二主

一般にポテンシャルを持った流れについてはベルヌイの定理を適用出来る。然し各点の流れを求めるためには圧力と流速との関係を示す更にもう一つの条件が必要である。著者は二次元的なポテンシャル流の場合にこの関係式を導き出すことが出来た。

図－1に示す如く記号を仮定し、直座標を円柱座標に変換すると

$$\left.\begin{aligned} & v_x = v\cos\varphi \qquad v_y = v\sin\varphi \\ & v_r = v\sin(\omega-\varphi) = -v\sin\theta \qquad v_\omega = v\cos\theta \\ & g_x = 0 \qquad g_y = -g \qquad g_r = g\cos\omega \qquad g_\omega = -\sin\omega\, g \end{aligned}\right\}\cdots(1)$$

となる。これ等の数値を二次元の円柱座標の場合のオイラーの運動方程式に代入し定常流の条件を入れると次式を得る。



図－1

$$g\cos\omega - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = -v\sin\theta\frac{\partial(-v\sin\theta)}{\partial r} + v\cos\theta\frac{\partial(-v\sin\theta)}{r\partial\omega} - \frac{v^2\cos^2\theta}{r}$$

$$-g\sin\omega - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = -v\sin\theta\frac{\partial(v\cos\theta)}{\partial r} + v\cos\theta\frac{\partial(v\cos\theta)}{r\partial\omega} - \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{r}$$

又ベルヌイの定理(2)をr及びωで偏微分すると

$$\frac{p}{\rho g} + r\cos\omega + \frac{v^2}{2g} = H \text{ ---------------------------- } (2)$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g\cos\omega + v\frac{\partial v}{\partial r} = 0 \qquad -\frac{\partial p}{\rho r\partial\omega} - g\sin\omega + v\frac{\partial v}{r\partial\omega} = 0 \text{ -------- } (3)$$

となりこの式を上の二式に代入し整理すると

$$\left.\begin{aligned} & -(1-\sin^2\theta)\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial\omega} + v\sin\theta\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial r} - \frac{v\cos\theta}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\omega} = \frac{v\cos^2\theta}{r} \\ & -v\sin\theta\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v(1-\cos^2\theta)}{r}\frac{\partial v}{\partial\omega} + v^2\sin^2\theta\frac{\partial\theta}{\partial r} - \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\omega} = \frac{v^2\sin\theta\cos\theta}{r} \end{aligned}\right\}(4)$$

となる。同様に連続式と非回転式とに代入し整理すると次の二式を得る。

$$r\sin\theta\frac{\partial v}{\partial r} - \cos\theta\frac{\partial v}{\partial\omega} + rv\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial r} + v\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial\omega} = -v\sin\theta$$

$$r\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial v}{\partial\omega} - rv\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial r} + v\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial\omega} = -v\cos\theta$$

この式より $\frac{\partial v}{\partial r}$, $\frac{\partial v}{\partial\omega}$ を $\frac{\partial\theta}{\partial r}$, $\frac{\partial\theta}{\partial\omega}$ で表はすと

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{v}{r}\left(1+\frac{\partial\theta}{\partial\omega}\right) \qquad \frac{\partial v}{\partial\omega}=rv\frac{\partial\theta}{\partial r} \quad \text{------------(5)} \quad (6)$$

となる。この条件は(4)式を満足することが代入することにより確かめることが出来る。即ち(5)及び(6)式が求める条件である。更に(5)式をωで(6)式をrで偏微分すると

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\omega\partial r}=v\frac{\partial\theta}{\partial r}-v\left(1+\frac{\partial\theta}{\partial\omega}\right)\frac{\partial\theta}{\partial r}+rv\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\omega\partial r}=-v\frac{\partial\theta}{\partial r}\left(1+\frac{\partial\theta}{\partial\omega}\right)-\frac{v}{r}\frac{\partial^2\theta}{\partial\omega^2}$$

となり左辺は同一であるから右辺を等置すると

$$r^2\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+r\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2\theta}{\partial\omega^2}=0 \quad \text{------------(7)}$$

となりこれが基本的な微分方程式である。この微分方程式は次の如く級数を使用し積分することが出来る。

$$\theta=A+B\omega+C\log r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(A_1r^n+A_2r^{-n})\cos n\omega+(B_1r^n+B_2r^{-n})\sin n\omega\right\} \quad \text{--------(8)}$$

(5)及び(6)式を書きかへて、

$$\frac{\partial(\log v)}{\partial\omega}=r\frac{\partial\theta}{\partial r} \qquad \frac{\partial(\log v)}{\partial r}=-\frac{1}{r}\left(1+\frac{\partial\theta}{\partial\omega}\right) \quad \text{------------(5)', (6)'}$$

この式を同様にω及びrで偏微分すると次の如くなる。

$$r^2\frac{\partial^2(\log v)}{\partial r^2}+r\frac{\partial(\log v)}{\partial r}+\frac{\partial^2(\log v)}{\partial\omega^2}=0$$

$$\therefore \log v=D+E\omega+F\log r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(D_1r^n+D_2r^{-n})\cos n\omega+(E_1r^n+E_2r^{-n})\sin n\omega\right\} \quad \text{---(9)}$$

即ちθ,及びvがr及びωの函数として表はされた事になる。(9)式及び(8)式の係数の関係は(9)式及び(8)式をr及びωで各々偏微分し、(5)'及び(6)'の関係を利用して係数を比較することにより

$$E=C\ ;\quad F=-(1+B)\ ;\quad D_1=-B_1\ ;\quad D_2=B_2\ ;\quad E_1=A_1\ ,\quad E_2=-A_2$$

なる関係が得られる。尚θ及びlog v中にある無限級数の部分の形は流速のポテンシャル函数に類似しているのでLamb氏著 Hydrodynamics (6版)の75ページを参照されたい。尚圧力は(9)式を(2)式に代入することにより求められ、流量は各点の流量をrについて積分することにより求められる。即ち

$$-\frac{p}{\rho g}=H-r\cos\omega-\frac{1}{2g}\exp\left[2\left\{D+E\omega+F\log r+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(C_1r^n+D_2r^{-n})\cos(n\omega)+(E_1r^n+E_2r^{-n})\sin(n\omega)\right\}\right\}\right]$$

$$q=\int_{r_0}^{r_a}v\cos\theta\,dr$$

仮定は一般的であるので幅の広い管水路の場合にも応用可能であり底面が平面で流線だけが曲っている場合にも応用出来る。