

京都大学工学部 正員 岩佐義朗

開水路における境界層の発達過程に関する従来の解析は、主として急勾配水路におけるその発達に伴う空気混入現象の発生という実用上の観点から進められてきた。しかしながら、それらの研究は一般に平板上に発達する境界層の理論の応用に過ぎず、開水路の水流が自由表面をもつという特殊性を考慮した最初の研究は、1952年に発表された G. Halbronn や A.E. Craya 及び J.W. Delleur のものであろう。著者もここ数年來この研究に努め、すでに理論的展開については一昨年土木学会関西支部学術講演会で報告した。ここではその後の研究と京都大学工学研究所水理実験室で行った実験とを比較しながら、開水路における乱流境界層の発達過程について考察を進める。

開水路水流に境界層の存在を考えると、その基礎的関係式は2次元定常流の場合、つぎのように示すことができる。

$$(i) \text{境界層外的主流方程式:} \quad u_0 \frac{du_0}{dx} = g(\sin\theta - \cos\theta \frac{dh}{dx}), \quad (1)$$

$$\text{あるいは,} \quad E = \frac{u_0^2}{2g} + h \cos\theta - x \sin\theta. \quad (2)$$

$$(ii) \text{境界層方程式:} \quad \frac{\tau_0}{\rho} = \frac{C_f u_0^2}{2} = g\delta(\sin\theta - \cos\theta \frac{dh}{dx}) - \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy - u_0 \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy \quad (3)$$

$$= u_0^2 \frac{d\vartheta}{dx} + u_0 \frac{du_0}{dx} (2\vartheta + \delta^*) \quad (4)$$

$$(iii) \text{流量条件:} \quad q = \int_0^h u dy = u_0(h - \delta^*) \quad (5)$$

ここに、底面に沿い下流方向に x 軸、これと直角上向きに y 軸をとり、 u を x 軸方向の流速、 h を水深、 δ を境界層厚、 θ を水路の傾斜角、 g を重力加速度、 E を比エネルギー、 τ_0 を底面の摩擦力、 ρ を流体密度、 q を単位巾流量、 ϑ を運動量厚、 δ^* を変位厚、 C_f を局所的摩擦係数とし、また添字の 0 は主流における値を示している。

いま、境界層内の流速分布を層流のとき抛物線型、乱流のとき指数函数型とすると、境界層が発達を始める点の近傍を除いては、上述の三つの方程式より流速を変数とする線型方程式がえられ、その解はつぎのようになる。

$$(i) \text{層流:} \quad \frac{\delta^*{}^2 g \sin\theta}{\nu} = \frac{u_0}{3} \left[1 - \left(\frac{u_{00}}{u_0} \right)^{10} \right] - \frac{10}{21} \frac{g q \cos\theta}{u_0^2} \left[1 - \left(\frac{u_{00}}{u_0} \right)^7 \right] \quad (6)$$

$$(ii) \text{乱流:} \quad \delta^*{}^{1+m} = \frac{\lambda_1 (1-C_1) \nu^{1+m}}{\tan\theta} \left[\frac{1+m}{1+m+3C_1-(4+m)C_2} \frac{u_0^{2-m}}{g \cos\theta} \left\{ 1 - \left(\frac{u_{00}}{u_0} \right)^{\frac{1+m+3C_1-(4+m)C_2}{C_1-C_2}} \right\} - \frac{q u_0^{-(1+m)}}{1-C_2} \left\{ 1 - \left(\frac{u_{00}}{u_0} \right)^{\frac{(1+m)(1-C_1)}{C_1-C_2}} \right\} \right] \quad (7)$$

ここに、添字の 00 は境界層の発達し初める原点における値、 λ_1 は指数法則による抵抗係数、 m は抵抗式の指数、 C_1 及び C_2 は $\int_0^1 f(e) de$ 、 $\int_0^1 f^2(e) de$ によって定められる係数、 $f(e)$ は流速の指数函数式である。対数法則のときは数値積分によらざるをえないが、Kármán や Halbronn と同様に独立変数を選ぶと、比較的簡単に計算をすすめることができる。

乱流境界層についてわれわれは勾配0より $1/10$ までについて実験を行った。一般に貯水槽より流れる水流は初め底面附近の流速の方が早いといういわゆるオリフィス型であるから、この実験では導流板によって数学的解析の条件になるべく近似させることにした。実験結果より η/δ^* と δ^* に関する Reynolds 数との関係を示したのが図-1 である。図-2 は(4)式を用いて計算した局所的摩擦係数を示したものである。

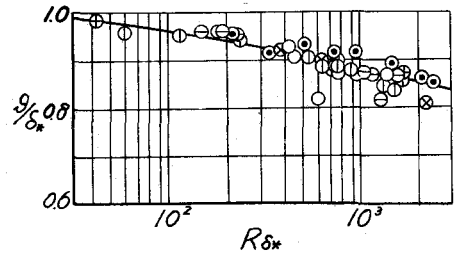


図-1 η/δ^* と $R\delta^*$ との関係

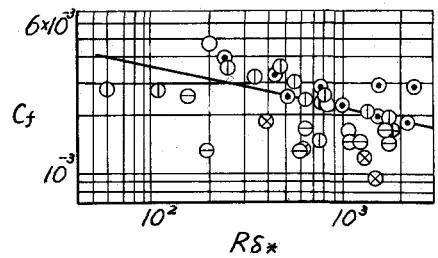


図-2 C_f と $R\delta^*$ との関係

W. J. Bauer は開水路における乱流境界層内の流速測定を行い、同様の表示を行ったが、その実験値はわれわれの値の約2倍である。この差は Bauer が水面勾配を無視した結果、

$$C_f = 2 \frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{x} + \frac{\delta^*}{2x}$$

という関係を用いたからである。われわれの実験値も Bauer と同様に計算すると、Bauer のものとよく一致することがわかった。図-3 は Prandtl 型対数法則が成立するという仮定のもとで実験値より計算した比例常数であり、境界層発達初期では K の値は大きく、急速に 0.4 に近づく。これらの実とは境界層が水面と交る点に近く、従って定常等流では対数法則の信頼性が確立されることがわかった。

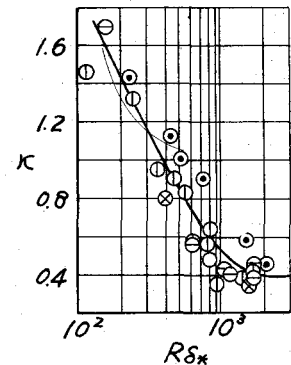


図-3 K と $R\delta^*$ との関係

図-4 は境界層の発達過程を示している。太い実線は(7)式において指数法則として Blasius の $1/7$ 乗則を用いた結果であり、細い実線は平板上に発達する乱流境界層の関係を示したものである。この図より(7)式が抵抗法則および流速分布則が Reynolds 数に無関係に一定であるという仮定によるものであるにもかかわらず、極めてよく実験結果と一致していることがわかる。

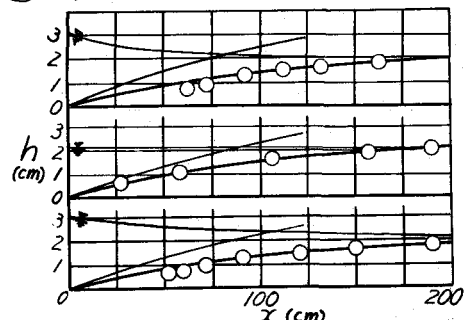


図-4 境界層の発達

以上の解析ではすべて境界層という概念の存在を仮定してきたが、(1)、(3)および(5)式より関係式を変形すれば、普通の1次元解析法による開水路水流の方程式になることがわかる。従って、このような考え方は空気混入水流のみならず、一般の開水路水流に関する一つの取扱い法ともいえよう。ここでは滑面のみを考えたが、粗面水路についても研究を進めている。最後に本研究に当り終始御懇切な指導を賜った石原教授、および御協力下さった岩垣助教、石原(実)助教(神戸大学)、松並運輸技官(元大学院学生)に厚く感謝の意を表す。