III－34　階差方程式による格子桁の解法

大阪大学　安宅 勝

1．概説

格子桁の解法はLeonhardtの名著があるが，表は10本桁の場合迄である。然し記号が複雑で表を使いこなすには相当の技術を要するし，基本式が示してないために確心を以て計算を行うのに困難を感ずる。本文に於ては階差方程式による解法を桁のJが等しい場合，両端の1本，内至2本の桁断面が異る場合示してある。横桁が数本ある場合は結局は横桁1本の場合に帰し得る故に解法は主として1本横桁の場合を論じる。又桁の捩れ剛性は無視してある。

2．基礎方程式の誘導

2·1　横桁1本の場合

記号を次の様に定める。

$\ell = 2\lambda$ = 支間

λ = 横桁間隔

a = 主桁間隔

$J_x = j_x J$ = 主桁の断面二次モーメント

$\bar{J}$ = 横桁の断面二次モーメント

$k = \dfrac{J}{\bar{J}} \cdot \dfrac{a^3}{\lambda^3}$

X_x = 主桁の分配荷重

P_x = 格点荷重

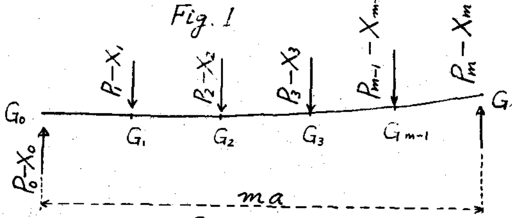
$\overline{X}_x = P_x - X_x$ = 横桁の分配荷重

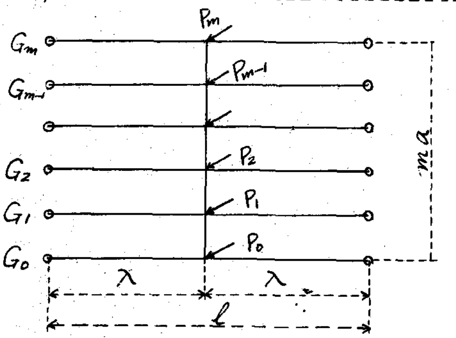
M_x = 格点に於ける主桁の曲げモーメント

$\overline{M}_x$ = 格点に於ける横桁の曲げモーメント

w_x = 格点の垂直変位

Fig. 1





横桁の撓みはFig. 1の通りである。

$$\overline{M}_0 = 0, \quad \overline{M}_m = 0$$

今，横桁の任意の格点につき3連モーメント式を作れば（Fig. 2）

$$\frac{\overline{M}_{x-1}}{a} + 4\frac{\overline{M}_x}{a} + \frac{\overline{M}_{x+1}}{a} = -\frac{6E\bar{J}}{a^3}(w_{x-1} - 2w_x + w_{x+1}) \quad \cdots\cdots\cdots 1)$$

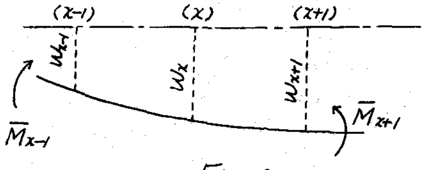


Fig. 2.

$$w_x = \frac{X_x l^3}{48EJ_x} = \frac{\lambda^3}{6EJ}\cdot\frac{X_x}{j_x}$$ とおけば 1) は

$$\frac{\bar{M}_{x-1}}{a} + 4\frac{\bar{M}_x}{a} + \frac{\bar{M}_{x+1}}{a} = -\frac{1}{k}\left(\frac{X_{x-1}}{j_{x-1}} - 2\frac{X_x}{j_x} + \frac{X_{x+1}}{j_{x+1}}\right) \text{-----2)}$$

$$k = \frac{J}{\bar{J}}\cdot\frac{a^3}{\lambda^3}$$

$$\underset{x}{\Delta^2}\frac{\bar{M}_x}{a} = \frac{\bar{M}_{x-1}}{a} - 2\frac{\bar{M}_x}{a} + \frac{\bar{M}_{x+1}}{a} = -(P_x - X_x)$$

$$\underset{x}{\Delta^2}\frac{X_x}{j_x} = \frac{X_{x-1}}{j_{x-1}} - 2\frac{X_x}{j_x} + \frac{X_{x+1}}{j_{x+1}}$$

2) の両辺に $\underset{x}{\Delta^2}$ の操作をすると

$$\frac{X_{x-2}}{j_{x-2}} - \left(\frac{4}{j_{x-1}} - k\right)X_{x-1} + \left(\frac{6}{j_x} + 4k\right)X_x - \left(\frac{4}{j_{x+1}} - k\right)X_{x+1} + \frac{X_{x+2}}{j_{x+2}} = k(P_{x-1} + 4P_x + P_{x+1})$$
------- 3)

pt. 1) に於ては $\underset{x}{\Delta^2}\frac{\bar{M}_x}{a} = 0$, $\underset{x}{\Delta^2} w_x = 0$ と置けば

$$-\frac{2}{j_0}X_0 + \left(\frac{5}{j_1} + 4k\right)X_1 - \left(\frac{4}{j_2} - k\right)X_2 + \frac{X_3}{j_3} = k(4P_1 + P_2) \text{ --------4)}$$

同様に pt(m-1) にたいして

$$-\frac{2}{j_m}X_m + \left(\frac{5}{j_{m-1}} + 4k\right)X_{m-1} - \left(\frac{4}{j_{m-2}} - k\right)X_{m-2} + \frac{X_{m-3}}{j_{m-3}} = k(4P_{m-1} + P_{m-2}) \text{ -----5)}$$

さらに平衡條件として

$$\sum_{x=0}^{m-1}(m-x)(P_x - X_x) = 0$$

$$\sum_{x=1}^{m} x(P_x - X_x) = 0$$

或は

$$\sum_{0}^{m-1}(m-x)X_x = \sum_{0}^{m-1}(m-x)P_x \text{ ------6)}$$

$$\sum_{1}^{m} xX_x = \sum_{1}^{m} xP_x \text{ -------------7)}$$

即ち X_x を未知として, $(m+1)$ ヶ にたいし $(m+1)$ の方程式が成立する。

3. 階差方程式による解法

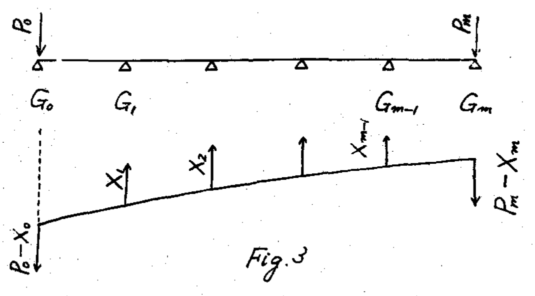


Fig.3

<u>Fig.3 の場合</u>　　主桁は等断面, $j_x = 1$

3)式は

$$X_{x-2} - (4-k)X_{x-1} + (6+4k)X_x - (4-k)X_{x+1} + X_{x+2} = 0$$
-----3a)

4), 5) 式は

$$-2X_0 + (5+4k)X_1 - (4-k)X_2 + X_3 = 0 \text{ ------ 4a)}$$

$$-2X_m + (5+4k)X_{m-1} - (4-k)X_{m-2} + X_{m-3} = 0 \text{ ------ 5a)}$$

3a) の解は、 $k>24$, $24>k>4$, $k<4$ の場合に応じて3種類あるが格子桁の場合は多くは $k<4$ となるからこの場合の解を示すと

$$X_x = C_1 \cosh Ax \cos Bx + C_2 \sinh Ax \sin Bx + C_3 \cosh Ax \sin Bx + C_4 \sinh Ax \sin Bx \quad \cdots\cdots 8)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{但し,} \quad \cosh A \cos B = \dfrac{4-k}{4}, \quad \sinh A \sin B = \dfrac{\sqrt{24k-k^2}}{4} \\ \text{或は} \quad \cosh^2 A = \dfrac{(16+8k)+\sqrt{(16+8k)^2-16(4-k)^2}}{16} \end{array}\right\} \cdots\cdots 9)$$

計算上の便宜が多いので 8)式を $m/2$ にたいし symmetrical と antimetrical の項であらわすと

$$X_x = C_1 \cosh(\tfrac{m}{2}-x)A \cos(\tfrac{m}{2}-x)B + C_2 \sinh(\tfrac{m}{2}-x)A \sin(\tfrac{m}{2}-x)B + C_3 \cosh(\tfrac{m}{2}-x)A \sin(\tfrac{m}{2}-x)B$$
$$+ C_4 \sinh(\tfrac{m}{2}-x)A \cos(\tfrac{m}{2}-x)B \quad \cdots\cdots 10)$$

10) を用いて計算する。

Boundary Condition は 4), 5), 6), 7) である。これに応じて

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 + \alpha_4 C_4 = 0 \quad \cdots\cdots 4a)$$
$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 - \alpha_3 C_3 - \alpha_4 C_4 = 0 \quad \cdots\cdots 5a)$$
$$\beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \beta_3 C_3 + \beta_4 C_4 = mP_0 \quad \cdots\cdots 6)$$
$$\beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 - \beta_3 C_3 - \beta_4 C_4 = mP_m \quad \cdots\cdots 7)$$

α, β は X_x の表を作って boundary condition に応じて和を取れば容易に求まる。

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \dfrac{-\alpha_2(mP_0 + mP_m)}{2\alpha_1\beta_2 - 2\alpha_2\beta_1} \\ C_2 = \dfrac{\alpha_1(mP_0 + mP_m)}{2\alpha_1\beta_2 - 2\alpha_2\beta_1} \end{array}\right\} \cdots\cdots 11) \qquad \left.\begin{array}{l} C_3 = \dfrac{-\alpha_4(mP_0 + mP_m)}{2\alpha_3\beta_4 - 2\alpha_4\beta_3} \\ C_4 = \dfrac{\alpha_3(mP_0 + mP_m)}{2\alpha_3\beta_4 - 2\alpha_4\beta_3} \end{array}\right\} \cdots\cdots 12)$$

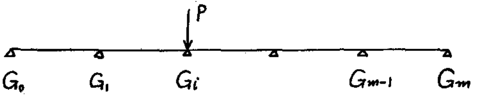


Fig. 4

Fig. 4 の場合は

$$X_{x-2} - (4-k)X_{x-1} + (6+4k)X_x - (4-k)X_{x+1} + X_{x+2} = P_{x-1} + 4P_x + P_{x+1} \quad \cdots\cdots 13)$$

荷重 P_x を sine の和であらわすと、 $$P_x = \frac{2P}{m}\sum_{r=1}^{m-1} \frac{\sin r\pi i}{m} \sin\frac{r\pi x}{m} \quad \cdots\cdots 14)$$

$P_x = 0, \quad x \neq i$

$P_x = P, \quad x = i$ である。

13) の解は $X_x = (X_x)_0 + (X_x)_1$, $(X_x)_0$ 特解, $(X_x)_1$ 補助解

$$(X_x)_0 = \sum_{r=1}^{m-1} B_r \sin\frac{r\pi x}{m}, \quad B_r = \frac{k(4+2\cos\frac{r\pi}{m})A_r}{4(1-\cos\frac{r\pi}{m})^2 + k(4+2\cos\frac{r\pi}{m})}, \quad A_r = \frac{2P}{m}\sin\frac{r\pi i}{m} \quad \cdots\cdots 15)$$

$$(X_x)_1 = C_1 \cosh(\tfrac{m}{2}-x)A\cos(\tfrac{m}{2}-x)B + C_2 \sinh(\tfrac{m}{2}-x)A\sin(\tfrac{m}{2}-x)B$$
$$+ C_3 \cosh(\tfrac{m}{2}-x)A\sin(\tfrac{m}{2}-x)B + C_4 \sinh(\tfrac{m}{2}-x)A\cos(\tfrac{m}{2}-x)B \quad \cdots\cdots 16)$$

A, B は 9) で与えられる。

Boundary Condition は右辺のみ異り、4a), 5a), 6), 7) に対応して、

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 + \alpha_4 C_4 = 0 \quad \cdots\cdots 4a)$$
$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 - \alpha_3 C_3 - \alpha_4 C_4 = 0 \quad \cdots\cdots 5a)$$
$$\beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \beta_3 C_3 + \beta_4 C_4 = (m-i)P - \sum_1^{m-1}(m-x)(X_x)_0 \quad \cdots\cdots 6)$$
$$\beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 - \beta_3 C_3 - \beta_4 C_4 = iP - \sum_1^{m-1} x(X_x)_0 \quad \cdots\cdots 7)$$

α, β は前と同じ。これより

$$C_1 = \frac{-\alpha_2\{mP - m\sum_1^{m-1}(X_x)_0\}}{2\alpha_1\beta_2 - 2\alpha_2\beta_1}, \quad C_2 = \frac{\alpha_1\{mP - m\sum_1^{m-1}(X_x)_0\}}{2\alpha_1\beta_2 - 2\alpha_2\beta_1}, \quad C_3 = \frac{-\alpha_4\{(m-2i)P - \sum_1^{m-1}(m-2x)(X_x)_0\}}{2\alpha_3\beta_4 - 2\alpha_4\beta_3}$$

$$C_4 = \frac{\alpha_3\{(m-2i)P - \sum(m-2x)(X_x)_0\}}{2\alpha_3\beta_4 - 2\alpha_4\beta_3} \quad \cdots\cdots (17)$$

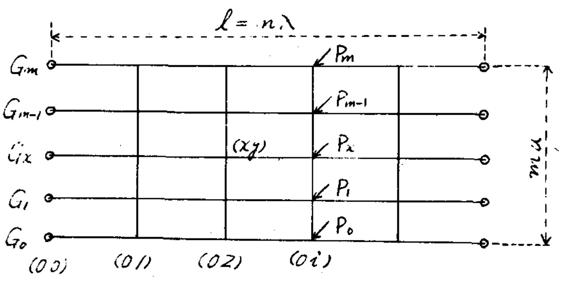


Fig. 5

4. 横桁が数個ある場合

$$P_{xy} = \sum_{r=1}^{n-1} {}_rP_x \sin\frac{r\pi y}{n}, \quad {}_rP_x = \frac{2P_x}{n}\sin\frac{r\pi i}{n}$$

$$X_{xy} = \sum_{r=1}^{n-1} {}_rX_x \sin\frac{r\pi y}{n}, \quad w_{xy} = \sum {}_rw_x \sin\frac{r\pi y}{n}$$

${}_rP_x$, ${}_rX_x$, ${}_rw_x$ は x のみの函数で $r=1, \cdots\cdots$ より $n-1$ 組の種類である。この場合は

$$ {}_rX_x = \frac{6EJ_x}{\lambda^3} \cdot \frac{4(1-\cos\frac{r\pi}{n})^2}{(4+2\cos\frac{r\pi}{n})} \cdot {}_rw_x \quad \cdots\cdots 18)$$

即ち ${}_rX_x$ は ${}_rw_x$ に比例するから $n-1$ 組の ${}_rP_x$ にたいし 3) が成立する

但し、

$$k_r = \frac{J}{\bar{J}} \cdot \frac{a^3}{\lambda^3} \cdot \frac{4(1-\cos\frac{r\pi}{n})^2}{(4+2\cos\frac{r\pi}{n})} \quad \cdots\cdots 19)$$

両端の主桁の断面が違う場合は紙面の都合で省略する。