III—16　　非線型減衰力をうける桁の強制振動

准員　京都大学　　山田善一

1　概　説

桁の振動はつぎの三段階にわけて考えることができる。

(1)　振動の微分方程式が線型の微分方程式で表わされる領域. 橋梁などの構造物に対して, この範囲で取扱うことのできるのは, ごく限られた振幅の範囲にすぎない。

(2)　弾性復元力の項は線型で表わされるが, 減衰力が非線型で表わされる領域. 模型桁による実験結果によれば, この領域は応力が弾性限度以内ですでに表われる。従って実際問題に関連しては、衝撃係数の決定などに際しては、この範囲の理論に従わねばならない。

本研究は　主としてこの領域を対象にした取扱いについて行ったものである。

(3)　復元力が非線型で表わされる領域。この領域は構造物の極限強度の決定, リミットデザインなどに関連して重要である。

2　振動の基礎式

桁の振動は正しくは、偏微分方程式によるべきである。しかし実験的に測定される値は, ある特定の点のタワミまたはヒズミであり、実験結果から直ちに偏微分方程式を求めることはできない。応力ーヒズミ曲線のかこむ面積がヒズミ振幅の n 乗に比例するという仮定のもとで, タワミと対数減衰率の間に $(\delta \propto \eta^{n-2})$ の関係のあること, またこの関係は実験の結果をよく説明することはすでにのべたところである。[1] しかし以上の仮定を偏微分方程式に入れた場合, 解析的にも, 数値的にも解を求めることは, 非常に困難となる。従って従来桁の線型振動でもよく行われているように, 振動の方程式として自由度 1 の振動を考え, 非線型減衰力を考慮してつぎのようにおく。

$$M\ddot{y} + \alpha(\dot{y})^m + ky = F(t) \qquad (1)$$

式(1)で $(\dot{y})^m$ に比例する減衰力を用いたのは, 正しくない。鋼構造物であれば、速度に無関係な減衰力をとるべきである。[2] しかし非線型減衰力の場合は, 位相おくれが振幅の関数となるから、振動振幅のみを対象とする　複素減衰の考えから[2] 式(1)に相当する微分方程式を作り、これを解くことは困難である。従って式(1)のようにおき係数 α を

$$\alpha = k_d / \omega^{m+1} \oint |\cos\omega t|^{m+1} dt \qquad (2)$$

とおけば　実用上式(1)で速度に無関係な減衰を表わすことができる。ただし k_d は減衰エネルギーを

$$\Delta W = k_d \eta^n \qquad (3)$$

とおいた場合の k_d である。また　$m = n-1$　となる。

3　定常振動解

非線型減衰力をうける場合でも、定常振動解　すなわち共振曲線を表わす式は、容易に求めることができる。すなわち 1 サイクルに, 外力のなす仕事と、減衰力により失われるエネルギーが等しい場合が定常振動であるから　エネルギーの関係から　振動振幅 η と

w/p との関係は

$$k_2\eta^2\left\{\pi^2\left(\frac{p^2}{\omega^2}-1\right)^2+C\eta^{n-2}\right\}=(P_0\pi C)^2 \tag{4}$$

ここに C は 対数減衰率を $\delta=C\eta^{n-2}$ とおいた場合の常数で，単純バリに対しては近似的に次式で与えられる。

$$C=\frac{\alpha_n}{E}\frac{I_n}{I}\left(\frac{\pi}{l}\right)^n\left\{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\right\} \tag{5}$$

式(4)の η を求めるには、一般の n に対しては 試算法によらねばならない。また $n=2$，$C=\delta$ とおけば 線型減衰振動の共振曲線に一致する。また $\omega=p$ とすると

$$\eta_{res}=\sqrt[n]{(P_0\pi)^2C/k} \tag{6}$$

となり η_{res} は P_0 の $2/n$ 乗に比例する。

4　過渡振動解

非線型減衰力をうける場合は 振幅は外力に対して非線型であるから 定常振動解は線型振動の場合ほど 重要な意義をもたない。実際桁に外力が通過する場合の過渡振動の問題は 線型振動の場合でも数値計算はかなり複雑である。従って式(1)に従って，過渡振動を求める場合、解析的には困難であるから 数値解法によらねばならない。数値解法で最近よく用いられるのは差分法であるが[3] 式(1)は $\dot{y}^m$ を含むので差分法は適当ではない。従って Runge-Kutta 法，Störmer-Levy 法 の数値解法を利用した。実際これらの方法による解は 地震に対する性状のように 初めの 2,3 サイクルを問題にする場合には適当であるが 橋桁のように，数サイクルから数十サイクルまでを問題にする場合には，計算が複雑になる。この複雑をさけるために、外力の周期が桁の固有振動周期と一致する場合は 振動のおのおのを解析するのではなく，これらの包絡線を求める微分方程式から出発して求めることが出来る。包絡線の微分方程式は，

$$dy/dt=(1/2TK)\left(Y(t)-ky^{n-1}\right) \tag{7}$$

式(7)から求めた包絡線の近似度をしらべる例として $n=2$ の場合に対する 線型振動の場合について求めると，実用上ほとんど差異が認められない。一般の n の場合式(7)は，数値解法によらねばならないが、式(1)の場合にくらべ，その分割の範囲をかなり大きくとることができ，計算上非常な利点がある。

註

1)　山田善一、鋼橋の振動減衰性と衝撃率に関する研究，日本工學会大会土木部会講演概要 第IV部 p.15 昭和31年

2)　小西一郎，山田善一，鋼構造物の減衰性と桁橋の強性振動性状について、土木學会誌，第41巻 第2号 昭和31年

3)　F. Stüssi, Trägerschwingungen unter bewegter Last, Publication of IABSE Vol. 13, pp. 339～355