II—32　Raft Foundation の理論的研究（その一）

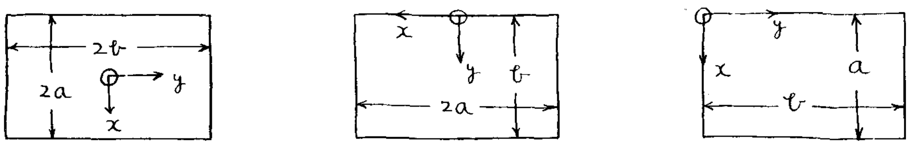
中央大学工学部　正員　山口　柏樹

Raft Found. の理論的研究の一部として，まず底を薄い板とみた時の曲げの問題を取扱い，ここではその基本的解について報告する。基礎地盤が砂と粘土の中間のものであれば地盤反力係数(k)は基礎全体にわたり一定と考えてよいようである。従って板の曲げの式は

$$\Delta\Delta w+\gamma^4 w=q(x,y)/D \qquad \gamma^4=k/D \tag{1}$$

ここに w は下向きの板のタワミ，D は曲げコワサ，$q(x,y)$ は分布荷重強度である。

考える境界条件としては，自由(F)支持(S)固定(R)の三種に限るとし，F, S, R の配位が矩形板の中心軸に対して対称か否かに応じて座標と寸法を次図に示すごとくする。



x, y につき対称　　　x のみにつき対称　　　x, y につき非対称

周知のとおり Poisson 比を ν とすると

$x=c$ が自由　　$w_{xx}+\nu w_{yy}=0$　　$w_{xxx}+(2-\nu)w_{xyy}=0$

$x=c$ が支持　　$w=0$　　$w_{xx}+\nu w_{yy}=0$

$x=c$ が固定　　$w=0$　　$w_x=0$

$q(x,y)/D\equiv p(x,y)$ を変数について偶函数なら e, 奇函数なら o の脚符号をつけて表わすと

$$p(x,y)=P_{ee}+P_{oe}+P_{eo}+P_{oo}$$

$$=\frac{1}{4}\Big[\{p(x,y)+p(x,-y)+p(-x,y)+p(-x,-y)\}+\{p(x,y)+p(x,-y)-p(-x,y)-p(-x,-y)\}$$
$$+\{p(x,y)+p(-x,y)-p(x,-y)-p(-x,-y)\}+\{p(x,y)+p(-x,-y)-p(x,-y)-p(-x,y)\}\Big]$$

なお $\psi(x,y)=P_{ee}+P_{eo}$，$\varphi(x,y)=P_{oe}+P_{oo}$ はそれぞれ x につき偶，奇で y については任意函数である。かく $p(x,y)$ を分解し，その偶，奇に応じて Fourier 展開すると

$$p(x,y)=\sum_m\sum_n P_{mn}T_1(\alpha_m x)T_2(\beta_n y)$$

ここで T_1, T_2 は sin または cos を意味し $\alpha_m=m\pi/2a$，$\beta_n=n\pi/2b$ $(m,n=1,3,5,\cdots)$ である。すると(1)の特解(w_s)は

$$w_s=\sum_m\sum_n W_{mn}T_1(\alpha_m x)T_2(\beta_n y) \qquad W_{mn}=P_{mn}\Big/\{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2+\gamma^4\} \tag{2}$$

であり(1)で $q(x,y)\equiv 0$ とした $\Delta\Delta w+\gamma^4 w=0$ に対する斉次一般解(w_0)は

$$w_0=\sum_n A_n(x)T_2(\beta_n y)+\sum_n B_m(y)T_1(\alpha_m x)$$

ただし

$$A_n(x)=E_n\,\mathrm{Ch}\,c_n x\cos d_n x+F_n\,\mathrm{Sh}\,c_n x\sin d_n x+G_n\,\mathrm{Ch}\,c_n x\sin d_n x+H_n\,\mathrm{Sh}\,c_n x\cos d_n x$$
$$D_m(y)=K_m\,\mathrm{Ch}\,f_m y\cos g_m y+L_m\,\mathrm{Sh}\,f_m y\sin g_m y+M_m\,\mathrm{Ch}\,f_m y\sin g_m y+N_m\,\mathrm{Sh}\,f_m y\sin g_m y \tag{3}$$

ここに

$$\left.\begin{matrix}c_n\\d_n\end{matrix}\right\}=\sqrt{\frac{\pm\beta_n^2+\sqrt{\beta_n^4+\gamma^4}}{2}} \qquad \left.\begin{matrix}f_m\\g_m\end{matrix}\right\}=\sqrt{\frac{\pm\alpha_m^2+\sqrt{\alpha_m^4+\gamma^4}}{2}}$$

である。従って求めるタワミは

$$w=w_s+w_0 \tag{4}$$

で与えられる。

境界条件の配位の組み合わせは次の21通りが考えられる．次表には $x=+a$ の辺より反時計方向に廻った時に条件に従いF, S, Rで表わす．すると

(Ⅰ)　(S S S S)　(S F S F)　(S R S R)　(S S S F)　(S S S R)　(S F S R)

(Ⅱ)　(F F F F)　(R R R R)　(F F S S)　(R R S S)　(R R R S)

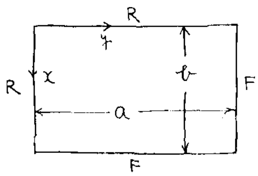
　　(F F F S)　(F R F R)　(F R S R)　(F S F R)　(R F S S)

(Ⅲ)　(R R R F)　(F S R R)　(F F F R)　(R F F S)

(Ⅳ)　(F F R R)

のごとくである．こゝで4つに大別してあるが(Ⅰ)では(3)に含まれる $E_n \sim N_m$ の未知常数を定めるのに陽に(厳密に)できるのに反して(Ⅱ)以下は $E_n \sim N_m$ の中の2, 3, 4個が無限級数で含まれるそれぞれ2, 3, 4群の連立方程式を解かねばならぬものである．

なお二軸対称の場合は各組に応じて p_{ee}, p_{oe}, p_{eo}, p_{oo} の4種の荷重形に対して求めた解を重ねる要があり，一軸対称のものでは $\phi(x, y)$, $\varphi(x, y)$ の2種に対する解の重合で得られる．また非対称の時には $p(x, y)$ のまゝで扱えばよい．



左の場合の一例を示す．

$$w_S = \sum_m \sum_n \overline{W}_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$$

$$\overline{W}_{mn} = \frac{4}{ab\left\{(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2+\gamma^4\right\}} \int_0^a \int_0^b p(\xi, \eta) \sin \alpha_m \xi \sin \beta_n \eta \, d\xi \, d\eta$$

$$w_0 = \sum_n A_n(x) \sin \beta_n y + \sum_m B_m(y) \sin \alpha_m x$$

$x=0$ で $w=0$，$x=a$ で $w_{xxx}+(2-\nu)w_{xyy}=0$ だから

$$A_n(0)=0 \qquad \{A_n''' - (2-\nu)\beta_n^2 A_n'\}(a) = 0$$

これに(3)用いて $E_n \sim H_n$ の中の二常数を消去すると $A_n(x) = E_n \varphi_n(x) + F_n \psi_n(x)$ (こゝで φ_n, ψ_n は双曲線函数と三角函数の積の一次結合)で与えられ $B_m(y) = K_m \overline{\Phi}_m(y) + L_m \overline{\Psi}_m(y)$ も同様成り立つ．

こゝで例えば $x=0$ で $w_x=0$ を考えると

$$\sum_n A_n'(0) \sin \beta_n y + \sum_m B_m(y) \alpha_m + \sum_m \sum_n \alpha_m \overline{W}_{mn} \sin \beta_n y = 0$$

であるが，今求めた $A_n(x)$ を入れ，さらに $B_m(y)$，すなわち $\overline{\Phi}_m(y)$ $\overline{\Psi}_m(y)$ を $\sin \beta_n y$ に関する Fourier 展開をおこなって $\sum_n \overline{\Phi}_{mn} \sin \beta_n y$，$\sum_n \overline{\Psi}_{mn} \sin \beta_n y$ と表わせば

$$E_n \varphi_n'(0) + F_n \psi_n'(0) + \sum_m \left(K_m \overline{\Phi}_{mn} + L_m \overline{\Psi}_{mn}\right) \alpha_m + \sum_m \alpha_m \overline{W}_{mn} = 0$$

となる．こゝに $n=1, 3, 5 \ldots$

このような式は他に3ヶ出来るからこれらが E_n, F_n, K_m, L_m を定める4群の連立方程式を与える

本研究に関して御指導を賜っている東京大学　最上教授に深謝の意を表する．