I—39　つるまき線を導線とする曲面について

北海道大学理学部　正員　澤田詮亮

1.　つるまき線(Helix).　　つるまき線は軸の周囲を一定の速さで回転と同時に一定の速さで軸方向に動く1点により生成される複曲線である。動点が軸から一定距離にあれば円柱状，軸からの距離が均等に変化すれば円錐状になるが，いずれの場合にも点の1回転に対する軸方向の移動距離をリードまたはピッチといい，軸方向に見て動点が時計の針の方向に前方へ遠ざかる回転なれば右まわりつるまき線，見る者に近づく回転なれば左まわりつるまき線である。つるまき線は与半径に等しい円柱に巻きつくと考えられ，平面図は円である。図-1のようにピッチと円を同数に等分し，ピッチの分割点を通る水平線と円柱面素との交点が1旋回のつるまき線上の点となる。この円柱を展開すればつるまき線は，底辺が円柱の円周に等しく，他の1辺はピッチに等しい直角三角形の斜辺として表われ，その長さは1旋回の実長に等しく，かつ斜辺と底辺間の角はつるまき線の一定勾配を表わす。従ってつるまき線の長さとその傾斜角は，この三角形から精確に計算できる。

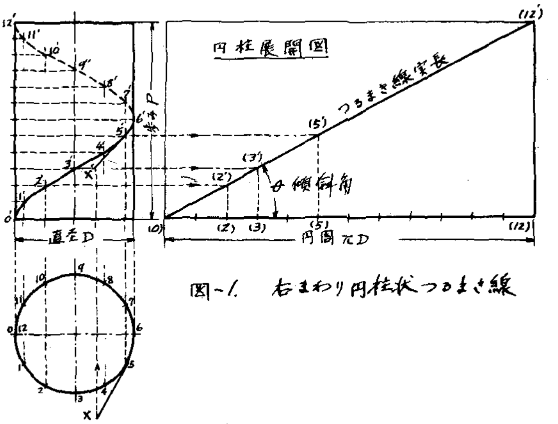

図-1.　右まわり円柱状つるまき線

$\tan\theta = P/2\pi r$ ，　θ：つるまき線の傾斜角，　P：ピッチ，　r：つるまき線の半径

5点にてつるまき線に接線を引くには，接線はつるまき線と同じ傾斜であること，長さ5-Xがつるまき線の長さ5'-3'に等しいならば点Xは点3と同高になければならないことに注目すべきである。平面図で5点において5-Xを円弧5-3の長さにとり，正面図上Xの対応点X'を点3と同高に定める。

2.　つるまき線面(Helicoid).　　つるまき線面は直線母線がつるまき線とその軸を導線とし，双方に接触しながら導面に平行移動して形成される面の総称であり，導平面がつるまき線軸に垂直なれば面素は軸に90°となり直角つるまき線面(Right helicoid)，導面が直円錐なれば面素はつるまき線軸と90°以外の一定角をなし斜つるまき線面(Oblique helicoid)となる。母線上任意の1点の軌跡はまた同軸で等しいリードのつるまき線となるから，つるまき線面は2つるまき線と導面による構成曲面，また母線上多数の点をとりそれらによる無数のつるまき線で形成される曲面とも考えることができる。　つるまき線面の近接面素は平行せず交りもしないから展開不可能でねじれ面であるが，類似つるまき線面は近接2面素が交るから展開可能で単曲面である。また面素の長さは実用には，与つるまき線と当該條件により固定する同一中心軸のつるまき線により限定される。

3.　つるまき線面の表わし方.　　直角つるまき線面は与えられた半径，ピッチ，巻き方のつるまき線を作り，ピッチの分割点を通りつるまき線の軸に垂直線を引けば，等間隔の面

素の正面図となる（図-2）。平面図は各面素は軸と円周上各分割点を連ねる放射線となる。　図-3は面素がつるまき線の軸と一定距離を保って交わらない開直角つるまき線面(Open right helicoid)であり，もし面素が軸に垂直でない場合は開斜つるまき線面(Open oblique helicoid)である。これらに対し面素が軸に交わるものは閉つるまき線面(Closed helicoid)として分類できる。　開直角つるまき線面は図のように各面素は円柱に接し，円柱は導面の役目をする。母線AB=Lがrを半径とする円柱に触れ，時計の針の方向に回転し下方に移動するとすれば，円柱平面図およびaとbの軌跡円(a-bが接点で2等分されるようにすれば同じ円となる)を画き，軌跡円をaを始点に等分割し，各分割点から面素を円柱の同じ側で接するように引き，軌跡円上各面素の他端をbの移動点とする。正面図はピッチを平面図と同数に等分割し，面素両端のつるまき線を作り，両者を連ねて各面素を得る。母線の中点Mは等しいピッチのつるまき線m'-n'を画く。開直角つるまき線面は錐状面(Conoid)，閉直角つるまき線面は柱状面(Cylindroid)の範疇に入れ得る。　図-4は開斜つるまき線面である。母線長L，その傾斜角θなれば，平面図はLcosθを半径とする円が母線下端の軌跡である。軸上の1点から母線Lに平行線を引き，これを母線とする直円錐を作って導円錐とする。図のようにその底円をピッチと同数に等分し，中心(円錐頂点)と分割点を結ぶ放射線を面素の下端の軌跡円まで延長すれば，各面素の平面図である。軸上の各ピッチ分割点から各導円錐面素に平行線を引き，平面図の各面素末端から対応線をあげ交点を求めるならば，面素下端の画くつるまき線と各面素の正面図を得る。正面図の外形線は，これら面素で包絡されたものとなる。　開斜つるまき線面の表わし方は，図-3に同じでただ，平面図に母線長をLcosθ(θ=母線の傾斜角)にとり，rを半径とする円に接点で2等分されるようにすればよい。

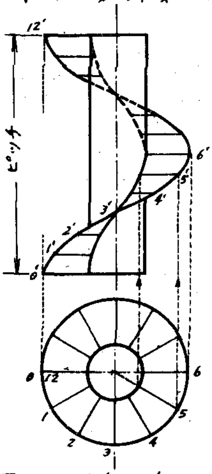

図-2 開直角つるまき線面

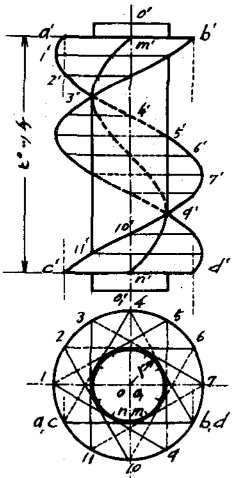

図-3. 開直角つるまき線面

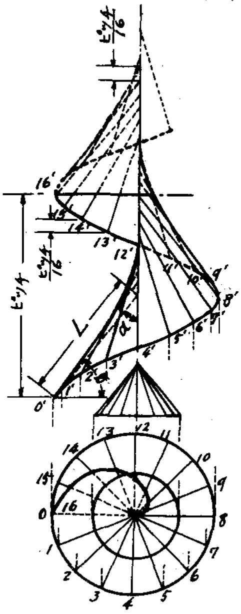

図-4. 開斜つるまき線面

錐状直角つるまき線面(Right conical helicoid)は円錐軸と錐状つるまき線を導線とし，母線は軸に垂直に移動する。この面の生成される状態から，面の分割部分は双曲放物線面(Hyperbolic paraboloid)と考えられる（軸導線上の面素はつるまき線導線の面素に平行でなく，交わらず，かつつるまき線の一分割部分は実用には直線と見做し得る）。

4. 切断。　開斜つるまき線面を軸に垂直な平面にて切断すれば，アルキメデス渦線(Archimedean Spiral)の切口が表われる(図-4)。各面素の軸となす傾角αは一定であるから各面素の切断平面との交点と軸からの距離は，面素上端の軸上の高さに比例して漸減するわけである。つるまき線の下側に上側と同じ曲面があればこれと対称的な曲線ができ，合

伴して三角ネジ山のこの部分の断面の形を示す。

5. 類似つるまき線面(Helical convolute).　この曲面はつるまき線を導線とし，これに触れて移動する直線母線が生成する単曲面であり，図-5のようにつるまき線と円柱を共通に表わす円を平面図とし，面素は円に接線に引く。つるまき線の軸に垂直な底面まで面素を延長すれば，平面図の面素の長さは，0から接点までの円弧の長さに等しくなる。従って円周上の各等分割点から接線の長さを，各分割点までの円弧の長さにとり，その終端を結ぶ線は底面の平面図となる。正面図ではこれら接線の一端はつるまき線上，他端は縁線で表わされる底面上にある。面素6-6は正面図で実長を表わし，その底面との角はつるまき線の傾斜を示し，すべての面素は底面と同角である。

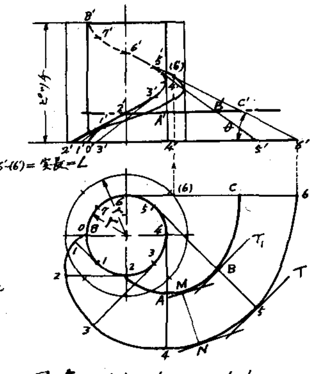

図-5. Helical Convolute と接平面

この曲面の特性は，近接2面素が交ること，軸に垂直な切断平面と面素との交点を連ねる曲線が円の伸開線(Involute)となることである。　つるまき導線の巻きつく円柱が直線に近づく極限において，類似つるまき線面はつるまき線面となる。

6. 類似つるまき線面の接平面と接平面によるこの曲面の表わし方.　図-5の点Aを通り水平面を設ければ曲面との交線は，他の伸開線2-A-B-Cを生ずる。点5を通りこの曲面に接平面を設けるには，伸開線に接線T-5を引く。この接線と面素5-5は求める平面を表わす。またBにおいて伸開線に接線を引けば，両接線は面素に垂直であるから互に平行であり，これらの接線は接平面を表わす。もし与曲線A-B-C，4-5-6を連結する類似つるまき線面を求める必要があれば，任意の点Mに接線を引き，これに平行に4-5-6に接線を引いて接点Nを定めれば，M-Nは求める曲面の一面素となる。多数の面素をこの方法で設定できるから，類似つるまき線面はまた一連の接平面の包絡として生成せられる。多くの場合2つの平面曲線はコンボリュートまたはコンボリュートと柱面や錐面の組合せで構成されるコンボリュート・タイプの曲面によって連結させ得る。その曲面の面素は接平面法によって見出すことができる。

7. 類似つるまき線面の展開.　この曲面は展開可能であり，つるまき線面に類似するのでDevelopable helicoidと称せられる。展開図ではつるまき線の任意の長さは，与円柱の半径(r)よりも多少大きい半径(R)をもった円曲線になって平らになる。展開図の半径は $R=\frac{r}{\cos^2\theta}$ (数学的に)に等しい。(R: つるまき線展開図の曲率半径，r: つるまき線の半径，θ: つるまき線の傾斜角)。Rを図式的に求めるには図-6(b)図のように $OP=r$ にとり，OPとθ角をなして

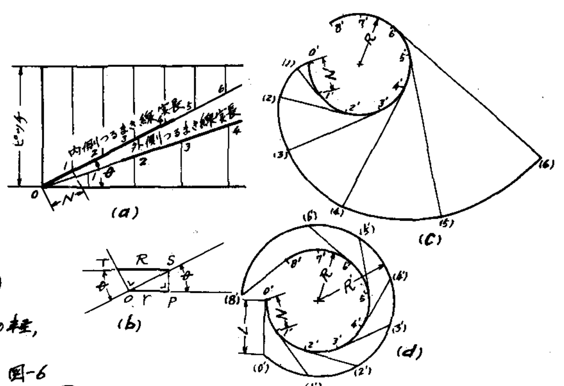

図-6. Helical convolute の展開

OS，またOPに垂直にPSを引く。OSに垂線OTを立て，SからOPに平行線STを引く。

$OS=\frac{r}{\cos\theta}$，　$ST=\frac{OS}{\cos\theta}=\frac{r}{\cos^2\theta}=R$　となる。　図-6の展開図は図-6(c)のように，Rをもって円弧を画き，(a)図上部の展開図からつるまき線の線分の実長0-1, 1-2,……に等しく

円弧上 0'-1', 1'-2'……を測りとる。この円弧の伸開線を作図すれば，求める展開図は円弧と伸開線間の面である。　軸を共有する内外2つるまき線導線間の類似つるまき線面の部分は Screw-conveyor の作用面として用いられる。展開図は半径 R の円弧を(c)図のようにつるまき線の展開された長さ 0'-8' に置き，点 0' にて（(d)図）母素 0'-0' を円弧に接して実長（図-5 の 6'-(6')=L）にとり，点(0')を設定すれば，点(0')を通る円弧は類似つるまき線面の末端線を表わす。母素 8'-(8')を点 8' にて円弧に接して置き，1旋回のこの曲面の展開図を完成する。

8. 斜つるまき線面の展開.　一般にねじれ面の近似展開は<u>三角形法</u>(Triangulation)によってなされる。すなわち小三角平面に曲面を分割し，これらの三角形の各辺の実長を見出す。三角形を形成するには母素，弦，対角線を使用する。図-7 のような特殊のつるまき線面において2つるまき線は，直ちに実長直線として表わすことができる。対角線をもって末端のつるまき線の弦と2母素は，2つの三角形を形成する。図-7 (a), (b), (c) は曲面の一部の近似展開を試みたもので，(b)図において三角形の各辺の実長を求め，(c)図にこれを展開したものである。直角つるまき線面の近似展開は，一連の双曲放物線面の展開と考えることができる。

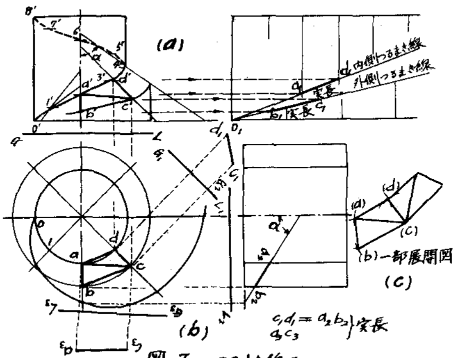

図-7　つるまき線面の展開

9. 応用工作物。　つるまき線を導線とする曲面は技術工学において広範囲に使用せられており，一般に至るところにその適用工作物を見受ける。少し実例に触れたいと思う。　図-8 (a) は三角ネジでネジ山は閉斜つるまき線面である　ネジ類，ボルト，ナットその他の工作物として重要な用途を持つ。(b), (c) はネジ山は方形であり，軸に垂直方向の上下面は直角つるまき線面である。(d) はねじり錐でねじれた面は開直角つるまき線面である。類似のものに矩形鋼棒をねじった異形鉄筋がある。図-9 (e) はらせん状樋で荷物，水，コンクリートなどの下降用とし，その滑動面は直角つるまき線面である。(f) はまわり階段で，図-9. 踏板と蹴込みの交線は直角つるまき線面の母素であり，その下側面は直角つるまき線面である。(g) は往時よく用いられたブーツア・アーチの一例で，アーチの各層継ぎ目面はつるまき線面に相当する。コンクリートミキサーには錐状直角つるまき線面が応用され，その他コンベヤー，プロペラー，手摺りなど。類似つるまき線面は，飛行機のの胴体，自動車，船，配管，ハスバ歯車の歯の側面，板金工作物などあり，特に2つの不同曲線の入口を連絡する曲面として重要な用途を持つ。　つるまき線状バネとして，丸棒から作られる各種コイルバネがある。それらは中心がつるまき線をたどるように移動する球によって生成される<u>複曲面</u>である。

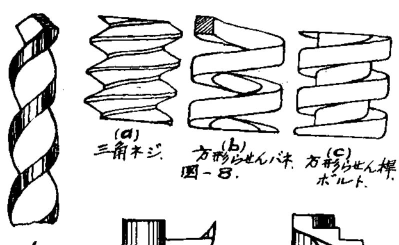

図-8.